EERSTE TUSSENTOETS 'INLEIDING IN DE GETALTHEORIE'

dinsdag 26 September 2017, 9 uur - 10 uur

Opmerking: Een eenvoudige rekenmachine is toegestaan (dus geen programmeerbare rekenmachine of smartphone).

Opgave 1
(a) Bepaal alle $x \in \mathbb{Z}$ zó dat

$$x \equiv 1 \bmod 2, \quad x \equiv 2 \bmod 3, \quad \text{en} \quad x \equiv 5 \bmod 7.$$

(b) Welke gehele getallen leveren de rest 1 op na delen door 2, 3, 5 en 7?

Opgave 2
Bewijs de volgende beweringen:
(a) Zij $m, n \in \mathbb{Z}$ en $\operatorname{ggd}(m, n) = 1$. Dan is $\operatorname{ggd}(m+n, m-n)$ gelijk aan 1 of 2.
(b) Zij $m, n \in \mathbb{Z}$. Dan is $\operatorname{ggd}(m, m+n)$ een deler van n.
(c) Zij $a, m, n \in \mathbb{Z}$ en stel dat $\operatorname{ggd}(a, m) = \operatorname{ggd}(a, n) = 1$. Dan is ook $\operatorname{ggd}(a, mn) = 1$.

Opgave 3
Zij f een multiplicatieve functie, d.w.z. $f(mn) = f(m)f(n)$ voor alle natuurlijke getallen m, n met $\operatorname{ggd}(m, n) = 1$. Wij definiëren een functie F door

$$F(n) := \sum_{d|n} f(d).$$

Bewijs dat $F(n)$ een multiplicatieve functie is, d.w.z. $F(mn) = F(m)F(n)$ voor alle natuurlijke getallen m, n met $\operatorname{ggd}(m, n) = 1$.

Opgave 4
Bewijs dat

$$\sum_{d|n} (-1)^{n/d} \phi(d) = \begin{cases} 0 & \text{als} \quad n \in \mathbb{N} \text{ even is} \\ -n & \text{als} \quad n \in \mathbb{N} \text{ oneven is.} \end{cases}$$

Date: 26 September 2017.