EINDTENTAMEN 'INLEIDING IN DE GETALTHEORIE'

dinsdag 7 november 2017, 9 uur - 12 uur

Opmerking: Een eenvoudige rekenmachine is toegestaan (dus geen programmeerbare rekenmachine of smartphone).

Opgave 1
a) Bepaal de kettingbreukontwikkeling van $\sqrt{14}$.
b) Bepaal het getal dat hoort bij de volgende kettingbreuk

$$\langle 6, 1, 5, 1, 12, 1, 5, 1, 12, \ldots \rangle.$$

Opgave 2
(a) Een groep van 17 apen heeft een aantal bananen verzameld. Ze verdelen de bananen over 11 stapels van dezelfde grootte en een twaalfde stapel met 6 bananen. Het was echter ook mogelijk geweest om elke aap even veel bananen te geven. Hoeveel bananen hebben ze minstens verzameld?
(b) Bepaal alle $x \in \mathbb{Z}$ zo dat

$$2x \equiv 11 \bmod 23 \quad \text{en} \quad 9x \equiv 12 \bmod 31.$$

Opgave 3
We definiëren een functie $\sigma(n) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ door

$$\sigma(n) := \sum_{d|n} d$$

(a) Bewijs dat $\sigma(n)$ een multiplicatieve functie is, d.w.z. $\sigma(mn) = \sigma(m)\sigma(n)$ voor natuurlijke getallen n, m met $\text{ggd}(n, m) = 1$.
(b) Bewijs de volgende bewering: als $\sigma(n)$ oneven is, dan is n gelijk aan een kwadraat of twee keer een kwadraat. Hint: gebruik deel (a).

Opgave 4
(a) Zij p een oneven priemgetal en $a \in \mathbb{Z}$. Bewijs dat het aantal oplossingen van de congruentievergelijking $x^2 \equiv a \bmod p$ gelijk is aan $1 + \left(\frac{a}{p}\right)$.
(b) Gebruik deel (a) om te laten zien dat

$$\sum_{a=0}^{p-1} \left(\frac{a}{p}\right) = 0.$$

(c) Leid uit (b) af dat de verzameling van restklassen $\{1, \ldots, p-1\}$ even veel kwadraatresten als niet-resten bevat.

Opgave 5
Bepaal alle oplossingen in de gehele getallen van volgende vergelijkingen
(a) $x^2 - 31y^2 = 1$,
(b) $x^2 - 30y^2 = -1$.

Opgave 6
Voor functies $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ schrijven we $\det(f(i,j))_{1 \leq i,j \leq n}$ voor de determinant van de $n \times n$ matrix waarvan het (i,j)-de element gelijk is aan $f(i,j)$. Bewijs dat

$$\det(\mathrm{ggd}(i,j))_{1 \leq i,j \leq n} = \prod_{k=1}^{n} \phi(k),$$

waarbij $\phi(k)$ Euler's ϕ-functie is. (Ter herinnering: $\phi(k)$ is het aantal getallen die relatief priem met n zijn en in $\{1, 2, \ldots, n\}$ liggen.)