

Elementaire Getaltheorie (WISB321)

Tentamen, 5 november 2014, 8:30 -11:30 uur

Bij dit tentamen is gebruik van boeken, dictaat of aantekeningen niet toegestaan. Als rekenhulp kun je een eenvoudige calculator gebruiken (dus geen GR of smartphone). Als je een onderdeel mist mag je wel het resultaat ervan in de volgende onderdelen gebruiken.

Motiveer je antwoorden!

Veel succes!

- (1 pt) Los $x^2 \equiv 1 \pmod{1000}$ op in $x \in \mathbb{Z}$.
 - (1 pt) Zij k geheel en ≥ 3 . Hoeveel restklassen x modulo 10^k heeft $x^2 \equiv 1 \pmod{10^k}$ als oplossing?
- Zij $x \in \mathbb{N}$ en p een oneven priemdelers van $x^2 + 3$.
 - (1 pt) Bewijs dat $p = 3$ of $p \equiv 1 \pmod{3}$ (gebruik hiervoor de kwadratische wederkerigheidswet).
 - (1/2 pt) Stel bovendien dat x even is. Bewijs dat $x^2 + 3$ deelbaar is door een priemgetal p van de vorm $4k - 1$.
 - (1/2 pt) Bewijs dat er oneindig veel priemgetallen bestaan van de vorm $12k + 7$.
- (1 pt) Zij p, q en tweetal priemgetallen met de eigenschap dat $q = 2p + 1$. Bewijs dat
$$\left(\frac{a}{q}\right) = -1, a \not\equiv -1 \pmod{q} \iff a \text{ is primitieve wortel modulo } q.$$
- Beschouw de vergelijking $3x^2 + 3y^2 = z^2$ in $x, y, z \in \mathbb{Z}$.
 - (1/2 pt) Bewijs dat voor elke oplossing geldt $3|x, 3|y, 3|z$.
 - (1/2 pt) Bepaal alle oplossingen.
- Zij $m \in \mathbb{N}$.
 - (1 pt) Bepaal de kettingbreuk van $\sqrt{9m^2 + 3}$.
 - (1/2 pt) Bepaal de oplossing van $x^2 - (9m^2 + 3)y^2 = 1$ in $x, y \in \mathbb{N}$ met kleinst mogelijke y .
 - (1/2 pt) Zelfde vraag, maar nu met de één na kleinst mogelijke y .
- (2 pt) Zij $A \in \mathbb{N}$. Bewijs, uitgaande van het *abc*-vermoeden, dat er hooguit eindig veel viertallen $x, y, p, q \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ zijn zó dat

$$x^p - y^q = A$$

en $\min(p, q) \geq 3$.