Herkansing Elementaire getaltheorie, WISB321

11 maart 2013, 9-12 uur

Bij dit tentamen zijn gebruik van dictaat, aantekeningen etc niet toegestaan. Wel is gebruik van een eenvoudige calculator toegestaan, de Grafische Rekenmachine niet.

Geef een goede onderbouwing van je antwoorden. Succes!

1. (a) (1 pt) Bepaal alle $x \in \mathbb{Z}$ die tegelijkertijd voldoen aan de drie volgende vergelijkingen,

$$\begin{aligned} x &\equiv 2 (\text{mod } 11) \\ 7x &\equiv 4 (\text{mod } 12) \\ x &\equiv 4 (\text{mod } 13) \end{aligned}$$

   (b) (1 pt) Laat zien dat het stelsel congruentievergelijkingen

$$x \equiv a_1 (\text{mod } m_1) \qquad x \equiv a_2 (\text{mod } m_2)$$

   een oplossing heeft precies dan als $\text{ggd}(m_1, m_2)$ een deler is van $a_1 - a_2$.

2. (a) (1 pt) Zij x een oneven getal. Laat zien dat voor elke priemdeler p van $x^2 + 4$ geldt dat $p \equiv 1 (\text{mod } 4)$. Laat ook zien dat $x^2 + 4$ een priemdeler p bevat met $p \equiv 5 (\text{mod } 8)$.

   (b) (1 pt) Laat zien dat er oneindig veel priemgetallen van de vorm $5 (\text{mod } 8)$ zijn.

3. In de volgende opgave(n) mag je aannemen dat de laatste stelling van Fermat geldig is.

   (a) (1 pt) Bewijs dat $xy(x + y) = z^4$ geen oplossingen heeft in postief gehele x, y, z met $\text{ggd}(x, y) = 1$.

   (b) (1 pt) Laat zien dat $xy(x+y) = z^4$ oneindig veel oplossingen heeft in positief gehele x, y, z (dus zonder voorwaarde $\text{ggd}(x, y) = 1$).

Z.O.Z.

4. (2 pt) Neem aan dat het *abc*-vermoeden geldt. Zij p, q een tweetal gegeven positieve gehele getallen met $p, q \geq 2$ en $\max(p, q) \geq 3$ en A, B, C een drietal gegeven positief gehele getallen. Bewijs dat er hooguit eindig veel positieve gehele getallen x, y zijn zó dat

$$Ax^p - By^q = C.$$

(Hint: begin eerst met $C = 1$).

5. Zij $\pi(x)$ de priemgetal telfunctie. Met kgv bedoelen we het kleinste gemeenschappelijke veelvoud.

   (a) (1 pt) Bewijs dat voor alle positief gehele n geldt dat

   $$\mathrm{kgv}(1, 2, \ldots, n) \leq n^{\pi(n)}.$$

   (b) (1 pt) Zij $h(n)$ het aantal priemgetallen p zódat $p < n$ en $p \equiv -1 (\mathrm{mod}\ 6)$. Bewijs dat $h(n) \leq \frac{2}{15}n + 1$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.