EINDTENTAMEN 'INLEIDING IN DE GETALTHEORIE'

donderdag 11 januari 2018, 13.30 uur - 16.30 uur

Opmerking: Een eenvoudige rekenmachine is toegestaan (dus geen programmeerbare rekenmachine of smartphone).

Opgave 1
a) Bepaal de kettingbreukontwikkeling van $\sqrt{28}$.
b) Bepaal het getal dat hoort bij de volgende kettingbreuk

$$\langle 5, 1, 2, 1, 10, 1, 2, 1, 10, \ldots \rangle.$$

Opgave 2

(a) Bepaal alle $x, y \in \mathbb{Z}$ zó dat

$$2x + 5y \equiv 4 \bmod 11 \quad \text{en} \quad x + 3y \equiv 7 \bmod 11.$$

(b) Bepaal alle $x, y \in \mathbb{Z}$ zó dat

$$2x + 3y \equiv 4 \bmod 6 \quad \text{en} \quad x + 3y \equiv 3 \bmod 6.$$

Opgave 3
Zij $k \in \mathbb{N}$. Wij definiëren een functie $\phi_k(n)$ door

$$\phi_k(n) := \sharp\{(m_1, \ldots, m_k) \in (\mathbb{N} \cap [1, n])^k : \mathrm{ggd}(m_1, \ldots, m_k, n) = 1.\}.$$

(a) Bewijs dat

$$\sum_{d|n} \psi_k(d) = n^k.$$

(b) Laat zien dat $\psi_k(n)$ een multiplicatieve functie in n is, d.w.z. $\psi_k(mn) = \psi_k(m)\psi_k(n)$ voor $m, n \in \mathbb{N}$ met $\mathrm{ggd}(m, n) = 1$.

Opgave 4
Bepaal alle oplossingen in de gehele getallen van volgende vergelijkingen
(a) $x^2 - 17y^2 = 1$,
(b) $x^2 - 16y^2 = 1$.

Opgave 5
Zij $m \in \mathbb{N}$ en $p = 4m + 1$ een priemgetal. Bewijs volgende bewering: als $d|m$ dan $\left(\frac{d}{p}\right) = 1$.

Opgave 6

Zij p een oneven priemgetal en $a \in \mathbb{Z}$. Bewijs dat het aantal oplossingen van de congruentievergelijking

$$x^2 - y^2 \equiv a \bmod p$$

gelijk is aan $p - 1$ als $p \nmid a$ and gelijk is aan $2p - 1$ als $p \mid a$.