Departement Wiskunde, Faculteit Bètawetenschappen, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de $\mathcal{TBC}$ van A−Eskwadraat.
Het college WISB321 werd in 2005/2006 gegeven door Dr. F. Beukers.

Elementaire getaltheorie (WISB321)
2 februari 2006

Dit is een open boek tentamen. Dat wil zeggen, het boek mag gebruikt worden maar geen andere zaken zoals aantekeningen, uitwerkingen, etc. Ook is gebruik van een eenvoudige calculator toegestaan, de Grafische Rekenmachine niet.
Geef een goede onderbouwing van je antwoorden. Succes!

Opgave 1

a) Bepaal alle $x \in \mathbb{Z}$ die tegelijkertijd voldoen aan de drie volgende vergelijkingen:

$$\begin{aligned} x &\equiv 2 \pmod{11} \\ 7x &\equiv 4 \pmod{12} \\ x &\equiv 4 \pmod{13} \end{aligned}$$

b) Laat zien dat het stelsel congruentievergelijkingen

$$x \equiv a_1 \pmod{m_1}; \qquad x \equiv a_2 \pmod{m_2}$$

een oplossing heeft precies dan als $\mathrm{ggd}(m_1, m_2)$ een deler is van $a_1 - a_2$.

Opgave 2

a) Zij x een oneven getal. Laat zien dat voor elke priemdeler p van $x^2 + 4$ geldt dat $p \equiv 1 \pmod 4$. Laat ook zien dat $x^2 + 4$ een priemdeler p bevat met $p \equiv 5 \pmod 8$.

b) Laat zien dat er oneindig veel priemgetallen van de vorm 5 (mod 8) zijn.

Opgave 3

Bepaal alle gehele getallen x, y, z met $\mathrm{ggd}(x, y, z) = 1$, zó dat

$$z^2 = xy(x + y)$$

Opgave 4

Neem aan dat het *abc*-vermoeden geldt. Zij A, B, p, q een viertal gegeven positieve gehele getallen met $p, q \geq 2$ en $pq > 4$. Bewijs dat er hooguit eindig veel positieve gehele getallen x, y zijn zó dat

$$Ax^p - By^q = 2.$$

Opgave 5

a) Laat zien dat $\pi(n) < n/3 + 2$ voor alle natuurlijke getallen n. (Hier is $\pi(m)$ de priemgetal telfunctie.) Hint: tel alle getallen niet deelbaar door 2 en 3.

b) Laat zien dat er een rij natuurlijke getallen $n_1, n_2, n_3, \ldots$ bestaat zó dat $\phi(n_k)/n_k \to 0$ als $k \to \infty$. (Hier is ϕ de Euler ϕ-functie.)

c) Gegeven onderdeel *b*), laat zien dat $\pi(m)/m \to 0$ als $m \to \infty$.