

MATHEMATISCH INSTITUUT, FACULTEIT WISKUNDE EN INFORMATICA, UU.
IN ELEKTRONISCHE VORM BESCHIKBAAR GEMAAKT DOOR DE \mathcal{TC} VAN A-Eskwadraat.
HET COLLEGE WISB321 WERD IN 2003/2004 GEGEVEN DOOR DR. F. BEUKERS.

Elementaire getaltheorie (WISB321) 27 januari 2004

Opgave 1

Bepaal alle $x \in \mathbb{Z}$ die tegelijkertijd voldoen aan de beide volgende vergelijkingen.

$$\begin{aligned}x^2 &\equiv 9 \pmod{100} \\ 37x &\equiv 4 \pmod{85}\end{aligned}$$

Opgave 2

- Voor welke priemgetallen is -3 een kwadraatrest?
- Zij $p > 3$ een priemgetal zó dat $q = 2p + 1$ priem is. Bewijs dat -3 een primitieve wortel modulo q is.

Opgave 3

Stel $x \in \mathbb{N}$ en zij p een priemdelers van $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$.

- Bewijs dat $p \equiv 1 \pmod{5}$ of $p = 5$. (Hint: merk op dat $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = \frac{x^5 - 1}{x - 1}$.)
- Bewijs, gebruikmakend van het voorgaande resultaat, dat er oneindig veel priemgetallen p van de vorm $p \equiv 1 \pmod{5}$ zijn.

Opgave 4

Neem aan dat het *abc*-vermoeden geldt. Zij A, B een tweetal gegeven positieve gehele getallen. Bewijs dat er hooguit eindig veel positieve gehele getallen x, y zijn zó dat

$$Ax^2 - By^3 = 1.$$

Opgave 5

Bewijs dat

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q^n (n!)^2}$$

irrationaal is voor elke $q \in \mathbb{N}$.