Departement Wiskunde, Faculteit Bètawetenschappen, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de $\mathcal{TBC}$ van A–Eskwadraat.
Het college WISB323 werd in 2009-2010 gegeven door Dr. I. Weiss.

Eerste deeltentamen Grondslagen van de Wiskunde (WISB323)
5 november 2009

- Schrijf op elk blad dat je inlevert je naam en studentnummer
- Het tentamen bestaat uit 4 opgaven met puntenverdeling zoals gegeven
- Het cijfer is het minimum tussen de punten gekregen (uit een totaal van 106) en 100.
- Gebruik van dictaat of boeken is niet toegestaan
- Je mag de resultaat van een onderdeel, ook als je het niet kon bewijzen, voor het oplossen van de op volgende onderdelen gebruiken

Opgave 1.

Zij X een niet lege verzameling. Een collectie $\mathcal{F} \subseteq P(X)$ heet een *filter* op X wanneer:

- $X \in \mathcal{F}$
- $\emptyset \notin \mathcal{F}$
- Voor alle $Y, Z \subseteq X$ geldt dat als $Z \in \mathcal{F}$ en $Z \subseteq Y$ dan $Y \in \mathcal{F}$
- Voor alle $Y, Z \subseteq X$ geldt dat als $Y, Z \in \mathcal{F}$ dan $Y \cap Z \in \mathcal{F}$

Een filter $\mathcal{F}$ op X heet een *ultrafilter* als voor alle $Y \subseteq X$ geldt dat of $Y \in \mathcal{F}$ of $X - Y \in \mathcal{F}$.
Een filter $\mathcal{F}$ op X heet *maximaal* als voor elke filter $\mathcal{F}'$ op X geldt dat als $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$ dan $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$.

a) (5 punten) Zij $x_0 \in X$. Zij $\mathcal{F} = \{Y \subseteq X \mid x_0 \in Y\}$.
Bewijs dat $\mathcal{F}$ een ultrafilter op X is. Een filter $\mathcal{F}$ van deze vorm voor een bepaalde x_0 heet een *principal* filter.

b) (7 punten) Zij $\mathcal{F}_0$ een filter op X. Bewijs dat er een maximaal filter $\mathcal{F}$ op X bestaat zo dat $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}$.

c) (7 punten) Zij $\mathcal{F}_{cof} = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid |\mathbb{N} - A| < \omega\}$ (dus de verzameling van alle *coeindige* verzamelingen van $\mathbb{N}$). Bewijs dat $\mathcal{F}_{cof}$ een filter op $\mathbb{N}$ is. Is het een principal filter?

d) (7 punten) Bewijs dat er een maximaal filter op $\mathbb{N}$ bestaat dat geen principal filter is.

Opgave 2.

Zij L_{pos} de taal met alleen het 2-plaatsige relatiesymbool $\leq$.

a) (4 punten) Geef (zonder bewijs) een theorie T_{pos} aan zo dat $M \models T_{pos}$ precies wanneer $\leq^M$ een poset is op M.

b) (7 punten) Een *anti-keten* in een poset $(P, \leq)$ is een verzameling $X \subseteq P$ zo dat voor alle $x, y \in X$ geldt dat als $x \leq y$ dan $x = y$. Als er een natuurlijk getal n bestaat en een anti-keten X met $|X| = n$ zo dat voor elke anti-keten Y geldt dat $|Y| \leq n$ dan heet n de *breedte* van P. Als er geen n is met deze eigenschap dan zeggen we dat P oneindige breedte heeft. Geef (zonder bewijs) voor elk natuurlijk getal k een L_{pos}-bewering φ_k zo dat voor elk model M van T_{pos} geldt $M \models \varphi_k$ precies dan als de breedte van M niet groter is dan k. Leg in woorden uit waarom je constructie werkt.

c) (7 punten) Bewijs dat er een theorie S is zo dat $M \models S$ precies dan als $\leq^M$ een posetstructuur op M geeft waarin M oneindige breedte heeft.

d) (8 punten) Is er een theorie T' zo dat $M \models T'$ precies dan als $\leq^M$ een poset structuur op M geeft waarin M eindige breedte heeft?

Opgave 3.

Voor een verzameling A schrijf A_{bij} voor de verzameling van alle bijectieve functies $f : A \to A$ en schrijf A_{inj} voor de verzameling van alle injectieve functies $g : A \to A$.

a) (7 punten) Voor een cardinaliteit $|X|$ zij $|X|! = |X_{bij}|$. Bewijs dat $|X|!$ goed gedefieneerd is.

b) (10 punten) Vind een injectieve functie $\psi : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}_{inj}$.
Bewijs dat ψ injectief is! (Herinnering: $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ is de verzameling van alle functies $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.)

c) (10 punten) Voor dit deel mag je gebruik maken van het feit dat er een injectieve functie $\varphi : \mathbb{N}_{inj} \to \mathbb{N}_{bij}$ bestaat. Bewijs dat $\omega! = 2^{\omega}$.

Opgave 4.

Geef voor elk van de onderstaande beweringen aan of hij juist of onjuist is. Geef een kort argument ter ondersteuning van je antwoord.

a) (9 punten) Zij $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$. Er bestaat een poset structuur $\leq_1$ op $\mathbb{R}_+$ zo dat $(\mathbb{R}_+, \leq_1)$ een welordening is en zo dat 0 het kleinste element ten opzichte van $\leq_1$ is.

b) (9 punten) Zij $(A, \leq)$ een welordening. Voor elke $a \in A$ zij $a_\uparrow = \{x \in A \mid x > a\}$. Het kan nooit het geval zijn dat er een $a \in A$ is zo dat $(A, \leq)$ orde-isomorf is met $a_\uparrow$ met de geinduceerde ordestructuur. (Herinnering: Een orde-isomorfisme $f : (A, \leq) \to (B, \leq)$ tussen twee welordeningen is een bijectieve functie $f : A \to B$ zo dat voor alle $x, y \in A$ geldt dat als $x \leq y$ in A dan $f(x) \leq f(y)$ in B.)

c) (9 punten) Een grootste element in een welordening, als het bestaat, kan nooit een limietelement zijn.