Tentamen Grondslagen van de Wiskunde A

10 november 2011, 14.00-17.00

DIT TENTAMEN BEVAT 5 OPGAVEN; ZIE OOK DE OMMEZIJDE.
Alle opgaven tellen even zwaar (10 punten); je cijfer is het totaal aantal punten, gedeeld door 5. Als een opgave uit meerdere deeltjes bestaat, staat bij elk deeltje hoeveel van de 10 punten dat deeltje waard is.
Advies: maak eerst die opgaven, die je kunt; en ga dan nadenken over de rest. Succes!

Opgave 1. Hieronder zijn gegeven drie deelverzamelingen X van $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Bepaal voor iedere X of X eindig of aftelbaar oneindig is, dan wel kardinaliteit 2^ω heeft. Licht je antwoord toe.

i)(4) $X = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid \text{voor elk stijgend rijtje } (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ in } \mathbb{N} \text{ is er een } n \in \mathbb{N} \text{ met } a_n \in A\}$

ii)(3) $X = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid \text{zowel } A \text{ als } \mathbb{N} - A \text{ is oneindig}\}$

iii)(3) $X = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid \text{voor alle } B \subseteq \mathbb{N} \text{ geldt } A \cap B = \emptyset \text{ of } A \cap B = A\}$

Opgave 2. Ter herinnering: een $\mathbb{Q}$-deelvectorruimte van $\mathbb{R}$ is een deelverzameling V van $\mathbb{R}$ waarvoor geldt: als $v, w \in V$ dan ook $v + w \in V$; en als $v \in V$ en $q \in \mathbb{Q}$, dan ook $qv \in V$.

a) (5) Bewijs met behulp van het Lemma van Zorn dat er een $\mathbb{Q}$-deelvectorruimte V van $\mathbb{R}$ bestaat die maximaal is met betrekking tot de eigenschap dat $1 \notin V$.

b) (5) Zij V als in a). Bewijs: voor elke $x \in \mathbb{R}$ is er een uniek paar $(q, v) \in \mathbb{Q} \times V$ zodat $x = v + q$.

Opgave 3. Herinner: als L en M welgeordende verzamelingen zijn, dan betekent de notatie $L \preceq M$ dat L isomorf is met een beginsegment van M. We schrijven $L \prec M$ als $L \preceq M$ en $L \not\cong M$.

a) (5) Bewijs: als $L \prec M$ dan is er een unieke $m \in M$ zodat L isomorf is met $\{x \in M \mid x < m\}$.

b) (5) Bewijs, dat er geen oneindige rij $L_0, L_1, \cdots$ van welordeningen bestaat, zodat $L_{n+1} \prec L_n$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.

Opgave 4.

a) (4) Laat L de taal zijn met één 2-plaatsig functiesymbool $\cdot$ voor vermenigvuldiging; en laat $\mathbb{R}$ en $\mathbb{C}$ de L-structuren zijn (met gewone vermenigvuldiging). Geef een L-zin die waar is in $\mathbb{C}$ maar niet in $\mathbb{R}$.

b) (4) Laat $L = \{\leq\}$ de taal van partiële ordeningen zijn en M de L-structuur met $M = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ en $\leq^M = \{(x, y) \mid x \text{ is een deler van } y\}$.

Geef een L-formule $\phi(x)$ die het element 2 definieert in M (d.w.z.: voor alle $m \in M$ geldt: $M \models \phi[m/x] \Leftrightarrow m = 2$).

c) (2) Laat $L = \{f\}$ waar f een 1-plaatsig functiesymbool is. Geef een L-zin ϕ zodat voor elke L-structuur M geldt: als $M \models \phi$ dan is M oneindig.

Opgave 5. In deze opgave is weer $L = \{f\}$ met f een 1-plaatsig functiesymbool. Voor een L-structuur M en $a \in M$ zeggen we dat a *cyclisch* is, als er een natuurlijk getal $n \geq 1$ is zodat $(f^M)^n(a) = a$.

Bewijs met behulp van de Compactheidsstelling dat er geen L-theorie bestaat waarvan de modellen precies die L-structuren zijn die cyclische elementen hebben.