Tentamen Grondslagen van de Wiskunde B

Dit tentamen bevat 5 opgaven; zie ook de ommezijde.

27 januari 2015, 08.30-11.30

Alle opgaven tellen even zwaar (10 punten); je cijfer is het totaal aantal punten, gedeeld door 5. Als een opgave uit meerdere deeltjes bestaat, staat bij elk deeltje hoeveel van de 10 punten dat deeltje waard is.
Advies: maak eerst die opgaven, die je kunt; en ga dan nadenken over de rest. Succes!

Opgave 1. Laat L een taal zijn, T een L-theorie, M een model van T en A een substructuur van M. We beschouwen ook de taal L_A, die een constante heeft voor elk element uit A.

Veronderstel, dat de theorie T kwantoreliminatie heeft.

a) (5) Laat zien dat er voor elke L_A-zin ϕ een L_A-zin ψ is zodat geldt:

$$M \models \phi \;\Leftrightarrow\; A \models \psi$$

b) (5) Stel nu, dat M_1 en M_2 modellen van T zijn, en A een substructuur van zowel M_1 als M_2. Laat zien dat M_1 en M_2 dezelfde L_A-zinnen waar maken.

Opgave 2. De theorie T_d van *dichte lineaire ordeningen zonder eindpunten* is geformuleerd in de taal $L_d = \{<\}$ en heeft de axioma's:

$$\begin{array}{ll} \forall x \neg(x < x) & \forall xyz(x < y \wedge y < z \to x < z) \\ \forall xy(x < y \vee x = y \vee y < x) & \forall xy(x < y \to \exists z(x < z \wedge z < y)) \\ \forall x \exists zw(z < x \wedge x < w) & \end{array}$$

Ik herinner eraan, dat de theorie T_d *ω-kategorisch* is, d.w.z. elk tweetal aftelbaar oneindige modellen van T_d is isomorf.

a) (7) Laat nu T_d^2 de theorie zijn die dezelfde axioma's heeft als T_d, maar geformuleerd in de taal $L_d^2 = L_d \cup \{c, d\}$ waar c en d twee constanten zijn. Bewijs dat T_d^2 precies 3 niet-isomorfe aftelbare modellen heeft.

b) (3) Geef een voorbeeld van een theorie die precies 4 niet-isomorfe aftelbare modellen heeft.

Opgave 3. Laat met bewijsbomen zien:

a) (3) $\exists x\phi(x) \to \psi \vdash \forall x(\phi(x) \to \psi)$

b) (3) $\exists x(\psi \to \phi(x)) \vdash \psi \to \exists x\phi(x)$

c) (4) $\phi \vee (\psi \to \chi) \vdash \psi \to (\phi \vee \chi)$

Hier veronderstellen we in a) en b), dat de variabele x niet voorkomt in ψ.

Opgave 4. Laat, in de lege taal, ϕ_n de zin zijn die uitdrukt: "er zijn hooguit n elementen" (hier is n een natuurlijk getal > 0). Stel dat T een theorie is die alleen eindige modellen heeft.

Laat zien dat er een $n > 0$ is zodat $T \vdash \phi_n$.
[Hint: beschouw de theorie $T' = T \cup \{\neg\phi_n \mid n > 0\}$. Gebruik de Compactheidsstelling en de Volledigheidsstelling]

Opgave 5. Ik herinner eraan dat een verzameling x *transitief* heet als elk element van x een deelverzameling van x is; m.a.w., elk element van een element van x is weer een element van x.

Laat x een willekeurige verzameling. Met transfiniete recursie kunnen we een operatie F op het ordinaalgetal ω definiëren, die voldoet aan:

$$F(0) = x$$

$$F(\alpha + 1) = F(\alpha) \cup (\bigcup F(\alpha))$$

We definiëren: $\overline{x} = \bigcup_{\alpha \in \omega} F(\alpha)$.

a) (5) Laat zien dat $\overline{x}$ altijd transitief is.

b) (5) Laat zien: als $x \subseteq y$ en y is transitief, dan geldt $\overline{x} \subseteq y$ (Hint: gebruik inductie op ω om te laten zien dat $F(\alpha) \subseteq y$, voor alle $\alpha \in \omega$).

De verzameling $\overline{x}$ heet de *transitieve afsluiting* van x.