Tentamen Grondslagen van de Wiskunde A

8 december 2015, 09:30–12:30

DIT TENTAMEN BEVAT 5 OPGAVEN; ZIE OOK DE OMMEZIJDE.
Alle opgaven tellen even zwaar (10 punten); je cijfer is het totaal aantal punten, gedeeld door 5. Als een opgave uit meerdere deeltjes bestaat, staat bij elk deeltje hoeveel van de 10 punten dat deeltje waard is.
Advies: maak eerst die opgaven, die je kunt; en ga dan nadenken over de rest. Succes!

Opgave 1. We definiëren de volgende relatie tussen deelverzamelingen van $\mathbb{N}$:

$$X \sim Y \text{ geldt, precies als } (X - Y) \cup (Y - X) \text{ eindig is.}$$

a) (3) Bewijs dat de relatie $\sim$ een equivalentierelatie is.

b) (3) Bewijs dat voor elke $X \subseteq \mathbb{N}$ de equivalentieklasse van X aftelbaar is.

c) (4) Stel dat $\mathcal{A}$ een deelverzameling van $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ is met de eigenschap, dat voor elke $X \subseteq \mathbb{N}$ er een $A \in \mathcal{A}$ bestaat zodat $X \sim A$. Laat zien dat $\mathcal{A}$ overaftelbaar is.

Opgave 2.

a) (3) Bewijs m.b.v. het lemma van Zorn dat er een deelverzameling $\mathcal{F}$ van $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ is die maximaal is met betrekking tot de volgende eigenschap: voor elke eindige deelverzameling $\{A_1, \ldots, A_n\}$ van $\mathcal{F}$ is $A_1 \cap \cdots \cap A_n$ *oneindig*.

b) (2) Stel $\mathcal{F}$ is als in a). Bewijs: als $A, B \in \mathcal{F}$ dan ook $A \cap B \in \mathcal{F}$.

c) (2) Stel $\mathcal{F}$ is als in a). Bewijs: als $A \in \mathcal{F}$ en $A - B$ is eindig, dan $B \in \mathcal{F}$.

d) (3) Stel $\mathcal{F}$ is als in a). Bewijs: als $B \notin \mathcal{F}$, dan geldt $\mathbb{N} - B \in \mathcal{F}$.

Opgave 3. Stel A is een verzameling en L is een welordening waarvoor geldt dat $|L_x| < |A|$ voor alle $x \in L$. Hier duidt L_x de verzameling $\{y \in L \mid y < x\}$ aan.

a) (6) Laat zien dat $|L| \leq |A|$.

b) (4) Laat zien dat in a), het teken $\leq$ niet zonder meer vervangen kan worden door $<$.

Opgave 4. Laat L de taal zijn met één 2-plaatsig functiesymbool f. We beschouwen de L-structuur $M = \mathbb{R}_{\geq 0}$, met $f^M(x, y) = x^2 + y^2$.

a) (3) Geef een L-formule met één vrije variabele x, die in M het getal 0 definieert.

b) (4) Geef een L-formule $\psi(x, y)$ in twee vrije variabelen x en y, zodat voor alle $a, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ geldt:

$$M \models \psi(a, b) \text{ precies wanneer } a \leq b$$

c) (3) Geef een L-formule $\chi(x)$ in één vrije variabele x, die in M het getal 5 definieert.

Opgave 5. We herinneren aan de notatie $T \models \phi$ voor een L-theorie T en een L-zin ϕ: $T \models \phi$ betekent dat ϕ waar is in elk model van T.

Laten nu T_1 en T_2 L-theorieën zijn en ϕ een L-zin; veronderstel dat $T_1 \cup T_2 \models \phi$. Laat zien dat er L-zinnen ψ_1 en ψ_2 zijn met de eigenschappen:

i) $T_1 \models \psi_1$

ii) $T_2 \models \psi_2$

iii) $\{\psi_1, \psi_2\} \models \phi$

[Hint: gebruik dat $T \models \phi$ geldt, precies als $T \cup \{\neg\phi\}$ inconsistent is. Gebruik de Compactheidsstelling.]