Tentamen Grondslagen van de Wiskunde A, met uitwerkingen

8 december 2015, 09:30–12:30

DIT TENTAMEN BEVAT 5 OPGAVEN; ZIE OOK DE OMMEZIJDE.
Alle opgaven tellen even zwaar (10 punten); je cijfer is het totaal aantal punten, gedeeld door 5. Als een opgave uit meerdere deeltjes bestaat, staat bij elk deeltje hoeveel van de 10 punten dat deeltje waard is.
Advies: maak eerst die opgaven, die je kunt; en ga dan nadenken over de rest. Succes!

Opgave 1. We definiëren de volgende relatie tussen deelverzamelingen van $\mathbb{N}$:

$$X \sim Y \text{ geldt, precies als } (X - Y) \cup (Y - X) \text{ eindig is.}$$

a) (3) Bewijs dat de relatie $\sim$ een equivalentierelatie is.

b) (3) Bewijs dat voor elke $X \subseteq \mathbb{N}$ de equivalentieklasse van X aftelbaar is.

c) (4) Stel dat $\mathcal{A}$ een deelverzameling van $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ is met de eigenschap, dat voor elke $X \subseteq \mathbb{N}$ er een $A \in \mathcal{A}$ bestaat zodat $X \sim A$. Laat zien dat $\mathcal{A}$ overaftelbaar is.

Uitwerking: a) $X - X = \emptyset$, dus eindig; dus $X \sim X$. De relatie is dus reflexief. Omdat $(X - Y) \cup (Y - X) = (Y - X) \cup (X - Y)$, volgt $Y \sim X$ uit $X \sim Y$, dus de relatie is symmetrisch. Voor X, Y, Z geldt altijd $X - Z \subseteq (X - Y) \cup (Y - Z)$ (ga na), dus

$$(X - Z) \cup (Z - X) \subseteq (X - Y) \cup (Y - Z) \cup (Z - Y) \cup (Y - X)$$

en hieruit volgt direct dat $X \sim Z$ als $X \sim Y$ en $Y \sim Z$; de relatie is transitief.

b) Schrijf $\mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})$ voor de verzameling van eindige deelverzamelingen van $\mathbb{N}$. Laat $X \subseteq \mathbb{N}$ vast; schrijf $[X]$ voor de equivalentieklasse van X. Definieer een functie

$$f : \mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N}) \to [X]$$

door $f(U) = (X - (U \cap X)) \cup (U - X)$. Deze functie is injectief en surjectief, dus $|[X]| = |\mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})|$, maar het is bekend uit het dictaat dat de laatste verzameling aftelbaar is. Dus $[X]$ is aftelbaar.

c) Uit de eigenschap volgt direct dat de afbeelding $A \mapsto [A]$ een surjectie van $\mathcal{A}$ op de verzameling equivalentieklassen van $\sim$ geeft; als $\mathcal{A}$ aftelbaar was, dan was de verzameling equivalentieklassen dat dus ook, maar dan zou, gezien het resultaat van b), $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ een aftelbare vereniging van aftelbare verzamelingen zijn en dus aftelbaar, wat niet zo is. $\mathcal{A}$ is dus overaftelbaar.

Opgave 2.

a) (3) Bewijs m.b.v. het lemma van Zorn dat er een deelverzameling $\mathcal{F}$ van $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ is die maximaal is met betrekking tot de volgende eigenschap: voor elke eindige deelverzameling $\{A_1, \ldots, A_n\}$ van $\mathcal{F}$ is $A_1 \cap \cdots \cap A_n$ *oneindig*.

b) (2) Stel $\mathcal{F}$ is als in a). Bewijs: als $A, B \in \mathcal{F}$ dan ook $A \cap B \in \mathcal{F}$.

c) (2) Stel $\mathcal{F}$ is als in a). Bewijs: als $A \in \mathcal{F}$ en $A - B$ is eindig, dan $B \in \mathcal{F}$.

d) (3) Stel $\mathcal{F}$ is als in a). Bewijs: als $B \notin \mathcal{F}$, dan geldt $\mathbb{N} - B \in \mathcal{F}$.

Uitwerking: a) laat P de poset zijn, bestaande uit die deelverzamelingen $\mathcal{U}$ van $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ die de genoemde eigenschap hebben (dus als $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{U}$ dan is $A_1 \cap \cdots \cap A_k$ oneindig); P is geordend door inclusie. Stel, dat $\mathcal{C}$ een keten is in P. Als $A_1, \ldots, A_k \in \bigcup \mathcal{C}$, dan is er (vanwege de keten-eigenschap) een $C \in \mathcal{C}$ zodat $A_1, \ldots, A_k \in C$; omdat $C \in P$ volgt dat $A_1 \cap \cdots A_k$ oneindig is. We zien dat $\bigcup \mathcal{C}$ een element is van P en dus een bovengrens voor $\mathcal{C}$ in P. De poset P voldoet aan de voorwaarde van het Lemma van Zorn en heeft dus een maximaal element; dat is de gevraagde verzameling $\mathcal{F}$.

b) Het is makkelijk in te zien dat als $A, B \in \mathcal{F}$, de verzameling $\mathcal{F} \cup \{A \cap B\}$ nog steeds de eigenschap van deeltje a) heeft. Uit de maximaliteit van $\mathcal{F}$ volgt nu dat $\mathcal{F} \cup \{A \cap B\} = \mathcal{F}$, m.a.w. $A \cap B \in \mathcal{F}$.

c) Stel $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{F}$. We beschouwen $A_1 \cap \cdots \cap A_k \cap A \cap B$. We hebben:

$$A_1 \cap \cdots \cap A_k \cap A = (A_1 \cap \cdots \cap A_k \cap (A \cap B)) \cup (A_1 \cap \cdots \cap A_k \cap (A - B))$$

Nu staat hier links een oneindige verzameling (vanwege de eigenschap van $\mathcal{F}$), en $A_1 \cap \cdots \cap A_k \cap (A - B)$ is uiteraard eindig. Dus $A_1 \cap \cdots \cap A_k \cap (A \cap B)$ is oneindig; we zien dat $\mathcal{F} \cup \{B\}$ de eigenschap heeft, dus er volgt weer uit de maximaliteit van $\mathcal{F}$ dat $B \in \mathcal{F}$.
d) Stel $B \notin \mathcal{F}$. Dan heeft $\mathcal{F} \cup \{B\}$ de eigenschap *niet*, en dus zijn we $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{F}$ zodat $A_1 \cap \cdots A_k \cap B$ eindig is. Dankzij deeltje b) weten we dat $A_1 \cap \cdots \cap A_k \in \mathcal{F}$; we schrijven A voor deze verzameling. Nu is A oneindig en $A \cap B$ is eindig, dus $A - (\mathbb{N} - B)$ is eindig. Uit c) volgt nu dat $\mathbb{N} - B$ een element van $\mathcal{F}$ is.
Opgave 3. Stel A is een verzameling en L is een welordening waarvoor geldt dat $|L_x| < |A|$ voor alle $x \in L$. Hier duidt L_x de verzameling $\{y \in L \mid y < x\}$ aan.

a) (6) Laat zien dat $|L| \leq |A|$.

b) (4) Laat zien dat in a), het teken $\leq$ niet zonder meer vervangen kan worden door $<$.

Uitwerking: a) Dit kon op veel manieren, maar elke manier gebruikt wel een equivalente versie van het Keuze-axioma. Een paar voorbeelden:

i) Laat $G : \mathcal{P}(A) - \{\emptyset\} \to A$ een functie zijn zodat $G(X) \in X$ voor alle niet-lege $X \subseteq A$ (zo'n functie construeer je met behulp van het Keuze-axioma). Definieer nu een injectieve functie $f : L \to A$ door

$$f(x) \;=\; G(A - \{f(y) \mid y < x\})$$

Dit is goed gedefinieerd: de inductiehypothese is dat de beperking van f tot L_x injectief is. Omdat $|L_x| < |A|$ is $A - \{f(y) \mid y < x\}$ een niet-lege verzameling, en we kunnen $f(x)$ dus definiëren op de gegeven manier. En f blijft injectief.

ii) Een andere manier was, om het lemma van Zorn toe te passen op de verzameling van paren (I, f), waar I een beginsegment van L is en f een injectieve functie van I naar A; $(I, f) \leq (J, g)$ als $I \subseteq J$ en f is de beperking van g tot I. Dit voldoet aan de voorwaarden van Zorn. Laat (I, f) een maximaal element van deze poset zijn. Als $I \neq L$, dan is $I = L_x$ voor een zekere $x \in L$, maar dan kon f voortgezet worden omdat dan $A - f(I)$ niet-leeg is. Hieruit volgt dat $I = L$, en f is de gevraagde injectie.

iii) Weer anders: pas de Welordeningsstelling toe om een welordening te definiëren op A. Bewijs vervolgens dat $L \preceq A$.

iv) Tenslotte kon het ook met het Principe van Cardinal Comparability: er geldt $|L| \leq |A|$ of $|A| \leq |L|$. In het eerste geval ben je klaar; in het tweede geval toon je aan dat daaruit, samen met de aanname omtrent L en A, moet volgen $|A| = |L|$, dus ook $|L| \leq |A|$.

b) Een weggevertje. Neem $L = \{0\}$ en $A = L$. Voor $x \in L$ is $|L_x| = 0 < 1$, maar $|L| = 1 \not< 1 = |A|$.

Opgave 4. Laat L de taal zijn met één 2-plaatsig functiesymbool f. We beschouwen de L-structuur $M = \mathbb{R}_{\geq 0}$, met $f^M(x, y) = x^2 + y^2$.

a) (3) Geef een L-formule met één vrije variabele x, die in M het getal 0 definieert.

b) (4) Geef een L-formule $\psi(x, y)$ in twee vrije variabelen x en y, zodat voor alle $a, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ geldt:

$$M \models \psi(a, b) \;\text{ precies wanneer }\; a \leq b$$

c) (3) Geef een L-formule $\chi(x)$ in één vrije variabele x, die in M het getal 5 definieert.

Uitwerking: a) Bijvoorbeeld $\forall yz(f(y, z) = x \to (y = x \wedge z = x))$. Noem deze formule $N(x)$.
b) We hebben in $\mathbb{R}_{\geq 0}$: $a \leq b$ precies als $a^2 \leq b^2$, precies als er een c is met $b^2 = a^2 + c^2$ oftewel $f(b, 0) = f(a, c)$. Definieer dus

$$\psi(x, y) \;\equiv\; \exists zw(N(w) \wedge f(x, z) = f(y, w))$$

c) Eerst definiëren we het getal 1. Zij $E(y)$ de formule $\neg N(y) \wedge \exists z(N(z) \wedge f(y, z) = y)$. Omdat $5 = f(2, 1) = f(f(1, 1), 1)$ kunnen we voor $\chi(x)$ de volgende formule nemen:

$$\exists u(E(u) \wedge x = f(f(u, u), u))$$

Opgave 5. We herinneren aan de notatie $T \models \phi$ voor een L-theorie T en een L-zin ϕ: $T \models \phi$ betekent dat ϕ waar is in elk model van T.

Laten nu T_1 en T_2 L-theorieën zijn en ϕ een L-zin; veronderstel dat $T_1 \cup T_2 \models \phi$. Laat zien dat er L-zinnen ψ_1 en ψ_2 zijn met de eigenschappen:

i) $T_1 \models \psi_1$

ii) $T_2 \models \psi_2$

iii) $\{\psi_1, \psi_2\} \models \phi$

[Hint: gebruik dat $T \models \phi$ geldt, precies als $T \cup \{\neg\phi\}$ inconsistent is. Gebruik de Compactheidsstelling.]

Uitwerking: Uit de Compactheidsstelling volgt, dat er een eindige deeltheorie T van $T_1 \cup T_2$ is zodat $T \models \phi$. Als $T = \emptyset$, kunnen we $\psi_1 = \psi_2 = \neg\bot$ nemen. Als $T = \{\chi_1, \ldots, \chi_k\}$ en $T \cap T_1 = \emptyset$, laat $\psi_1 = \neg\bot$ en $\psi_2 = \chi_1 \wedge \cdots \wedge \chi_k$. Als $T \cap T_1 = \{\chi_1, \ldots, \chi_j\}$ voor zekere $j < k$ (we mogen wel aannemen dat de χ_i zo geordend zijn dat eerst alle elementen van T_1 genoemd worden), neem $\psi_1 = \chi_1 \wedge \cdots \wedge \chi_j$ en $\psi_2 = \chi_{j+1} \wedge \cdots \wedge \chi_k$. Tenslotte, als $T \cap T_2 = \emptyset$, laat $\psi_1 = \chi_1 \wedge \cdots \wedge \chi_k$ en $\psi_2 = \neg\bot$.