Tentamen Grondslagen van de Wiskunde B

Met uitwerkingen.

25 januari 2016, 08.30-11.30

Opgave 1. Laat T de "theorie van discrete lineaire ordeningen zonder eindpunten" zijn; d.w.z., in de taal $L = \{<\}$ heeft T de volgende axioma's:

$$\begin{array}{cc} \forall x \neg(x < x) & \forall xyz((x < y \wedge y < z) \rightarrow x < z) \\ \forall xy(x < y \vee x = y \vee y < x) & \forall x \exists yz(y < x \wedge x < z) \\ \forall x \exists y \forall z(x < z \leftrightarrow (y < z \vee y = z)) & \end{array}$$

a) (5) Geef twee modellen M en N van T, zodat M een substructuur is van N, maar geen elementaire substructuur.

b) (5) Beredeneer dat T geen kwantoreliminatie heeft.

Uitwerking: a) Laat $N = \mathbb{Z}$, $M = \mathbb{Z} - \{0\}$. Dan is M een substructuur van N maar niet een elementaire substructuur: voor de getallen $-1, 1 \in M$ geldt in M, dat 1 de opvolger is van -1:

$$M \models \forall w(-1 < w \rightarrow 1 = w \vee 1 < w)$$

maar deze L_M-zin is *niet* waar in N. Een ander voorbeeld: neem $M = \mathbb{Z}$, $N = \mathbb{Z} + \mathbb{N}$ waarbij, in N, de elementen van $\mathbb{N}$ "boven" die van $\mathbb{Z}$ staan. In M is elk element de "opvolger" van iets:

$$M \models \forall x \exists y \forall z(y < z \leftrightarrow z = x \vee x < z)$$

maar deze zin is niet waar in N.

b) Dit is standaard theorie.

Opgave 2. Laat L de taal $\{R\}$ zijn, voor een 2-plaatsig relatiesymbool R, en T de L-theorie waarvan de modellen precies die structuren (M, R^M) zijn waarvoor geldt: R^M is een equivalentierelatie op M met oneindig veel equivalentieklassen, en elke equivalentieklasse is oneindig.

a) (5) Geef een stelsel axioma's voor T

b) (5) Bewijs dat T ω-kategorisch is.

Uitwerking: a) Ten eerste de axioma's die zeggen dat R een equivalentierelatie is:

$$\forall x R(x,x)$$
$$\forall xy(R(x,y) \to R(y,x))$$
$$\forall xyz(R(x,y) \wedge R(y,z) \to R(x,z))$$

Oneindig veel equivalentieklassen: voor elke $n > 0$ de zin

$$\exists x_1 \cdots \exists x_n \bigwedge_{1 \le i < j \le n} \neg R(x_i, x_j)$$

Elke klasse is oneindig: voor elke $n > 0$ de zin

$$\forall x \exists x_1 \cdots \exists x_n (R(x,x_1) \wedge \cdots \wedge R(x,x_n) \wedge \bigwedge_{1 \le i < j \le n} \neg(x_i = x_j))$$

b) Stel M, N zijn twee aftelbaar oneindige modellen van T. Dan heeft M oneindig veel equivalentieklassen, dus dat zijn er aftelbaar oneindig veel; en elke klasse is oneindig, dus aftelbaar oneindig. Hetzelfde geldt voor N. We kunnen M dus schrijven als $M = \bigcup_{i=0}^{\infty} M_i$, waar $M_0, M_1, \ldots$ de equivalentieklassen van M zijn; analoog is $N = \bigcup_{i=0}^{\infty} N_i$. Kies voor elke i aftellingen van M_i en N_i: $M_i = \{m_{i0}, m_{i1}, \ldots\}$, $N_i = \{n_{i0}, n_{i1}, \ldots\}$. De functie $f : M \to N$ die voor elke i, j m_{ij} naar n_{ij} stuurt, is een isomorfisme.

Opgave 3. Bewijs door middel van natuurlijke deductie (bewijsbomen):

a) (3) $\psi \to (\phi \vee \chi) \vdash (\psi \to \phi) \vee (\psi \to \chi)$

b) (4) $\forall x(\exists y R(x,y) \to \phi(x)) \vdash \forall xy(R(x,y) \to \phi(x))$ (hier komt de variabele y niet in $\phi(x)$ voor)

c) (3) $\psi \to (\phi \wedge \chi) \vdash (\psi \to \phi) \wedge (\psi \to \chi)$

Opgave 4. Laat L de taal $\{R, f\}$ zijn, waar R een 2-plaatsig relatiesymbool is en f een 1-plaatsig functiesymbool. We definiëren de L-theorie T door de volgende axioma's:

(1) de axioma's die zeggen dat R een equivalentierelatie is

(2) $\forall x R(x, f(x))$

(3) $\forall xy(R(x,y) \to f(x) = f(y))$

a) (5) Laat T_R de theorie in de taal $\{R\}$ zijn, met alleen de axioma's van (1). Is T conservatief over T_R? Beredeneer je antwoord.

b) (5) Laat T_f de theorie in de taal $\{f\}$ zijn, zonder axioma's. Is T conservatief over T_f? Beredeneer je antwoord.

Uitwerking: a) T is conservatief over T_R. Want laat ϕ een $\{R\}$-zin zijn zodat $T \vdash \phi$ maar $T_R \nvdash \phi$. Dan is er een model M van T_R zodat $M \not\models \phi$. In M is R^M een equivalentierelatie op M. Met het keuzeaxioma is er een functie F zodat F een element kiest uit elke equivalentieklasse. Definieer nu $f : M \to M$ door $f(x) = F([x])$. Dan is M, met deze definitie, een model van T. Maar dit is in tegenspraak met de aanname dat $T \vdash \phi$ en $M \not\models \phi$.
b) T is niet conservatief over T_f. Immers, $T \vdash \forall x(f(x) = f(f(x)))$, maar deze zin is geen gevolg van T_f.

Opgave 5. Ik herinner eraan dat de *cumulatieve hiërarchie* van verzamelingen $(V_\alpha)_{\alpha \text{ een ordinaalgetal}}$ als volgt gedefinieerd is:

$$\begin{aligned} V_0 &= \emptyset \\ V_{\alpha+1} &= \mathcal{P}(V_\alpha) \\ V_\lambda &= \textstyle\bigcup_{\beta<\lambda} V_\beta \text{ voor een limiet-ordinaalgetal } \lambda \end{aligned}$$

Voor een verzameling x is de *rang* van x, $\mathrm{rk}(x)$, gedefinieerd als het kleinste ordinaalgetal α waarvoor $x \subseteq V_\alpha$.

a) (5) Stel dat $\mathrm{rk}(x)$ een oneindig limiet-ordinaalgetal is. Bewijs dat x oneindig is.

b) (5) Stel dat $\mathrm{rk}(x) = \omega_1$, het kleinste overaftelbare ordinaalgetal. Bewijs dat x overaftelbaar is.

Uitwerking: a) Stel x is eindig: $x = \{a_0, \ldots, a_n\}$. Voor $i = 0, \ldots, n$ zijn er dan ordinaalgetallen $\alpha_i < \mathrm{rk}(x)$ met $a_i \in V_{\alpha_i}$. Immers, $V_{\mathrm{rk}(x)} = \bigcup_{\alpha<\mathrm{rk}(x)} V_\alpha$ omdat $\mathrm{rk}(x)$ een limiet-ordinaal is. Maar als α_j de grootste is van $\{\alpha_0, \ldots, \alpha_n\}$, dan volgt $x \subseteq V_{\alpha_j}$; dit is in strijd met het feit dat $\alpha_j < \mathrm{rk}(x)$.
b) Het ordinaalgetal ω_1 is het kleinste overaftelbare ordinaalgetal, dus elk ordinaalgetal $< \omega_1$ is aftelbaar. Stel x is aftelbaar: $x = \{a_0, a_1, \ldots\}$. Net als bij a) is er voor elke i een $\alpha_i < \omega_1$ met $a_i \in V_{\alpha_i}$. Immers, ω_1 is een limiet-ordinaalgetal. Laat $\beta = \bigcup_{i=0}^{\infty} \alpha_i$. Dan is $\beta \leq \omega_1$ en β is aftelbaar (want een aftelbare vereniging van aftelbare verzamelingen). Dus $\beta < \omega_1$. Echter, per constructie volgt $x \subseteq V_\beta$; in tegenspraak met de aanname dat $\mathrm{rk}(x) = \omega_1$.