Tentamen Grondslagen van de Wiskunde A
Met beknopte uitwerking

10 december 2013, 09:30–12:30

DIT TENTAMEN BEVAT 5 OPGAVEN; ZIE OOK DE OMMEZIJDE.
Alle opgaven tellen even zwaar (10 punten); je cijfer is het totaal aantal punten, gedeeld door 5. Als een opgave uit meerdere deeltjes bestaat, staat bij elk deeltje hoeveel van de 10 punten dat deeltje waard is.
Advies: maak eerst die opgaven, die je kunt; en ga dan nadenken over de rest. Succes!

Opgave 1. Gegeven zijn de volgende verzamelingen. Bepaal van elke verzameling of hij eindig, aftelbaar oneindig of overaftelbaar is; motiveer je antwoord.

a) (3) $\{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \,|\, \text{voor alle } x \in \mathbb{N} \text{ is } f(x+1) \leq f(x)\}$

b) (3) $\{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \,|\, \{x \in \mathbb{N} \,|\, f(x) \geq 2\} \text{ is eindig}\}$

c) (4) $\{A \subseteq \mathbb{N} \,|\, \text{ er is } N > 0 \text{ zodat voor alle } x \in \mathbb{N}\text{: } x \in A \Leftrightarrow x + N \in A\}$

Uitwerking: a) Er bestaan geen oneindige dalende rijtjes in $\mathbb{N}$, dus elke functie in deze verzameling is uiteindelijk constant. De gegeven verzameling staat dus in 1-1 correspondentie met de verzameling van eindige, niet-stijgende rijtjes van natuurlijke getallen, en deze laatste verzameling is aftelbaar oneindig.
b) Deze verzameling bevat als deelverzameling alle functies van $\mathbb{N}$ naar $\{0, 1\}$, d.w.z. alle deelverzamelingen van $\mathbb{N}$, en is dus overaftelbaar.
c) Voor een *vaste* $N \in \mathbb{N}_{>0}$ is de verzameling

$$\mathcal{A}_N = \{A \subseteq \mathbb{N} \,|\, \text{voor alle } x \in \mathbb{N}\text{: } x \in A \Leftrightarrow x + N \in A\}$$

in bijectief verband met de verzameling van deelverzamelingen van $\{0, \ldots, N-1\}$ en dus eindig. De gegeven verzameling is gelijk aan $\bigcup_{N>0} \mathcal{A}_N$. De verzameling is dus aftelbaar oneindig.

Opgave 2. Bewijs dat er een deelverzameling A van $\mathbb{R}$ bestaat met de volgende eigenschappen:

i) voor elke niet-lege eindige deelverzameling $\{a_1, \dots, a_n\} \subseteq A$ geldt

$$a_1^2 + \cdots + a_n^2 \notin \mathbb{Q}$$

ii) voor elke $x \in \mathbb{R} - A$ geldt: hetzij $x^2 \in \mathbb{Q}$, hetzij er is een eindige, niet-lege deelverzameling $\{a_1, \dots, a_n\}$ van A zodat

$$x^2 + a_1^2 + \cdots + a_n^2 \in \mathbb{Q}$$

Voor de duidelijkheid: de notatie $\{a_1, \dots, a_n\}$ veronderstelt dat alle a_i verschillend zijn *(Hint: gebruik het Lemma van Zorn).*

Uitwerking: beschouw de poset $(P, \leq)$ van alle deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ die aan i) voldoen, met de inclusie als ordening. Deze is niet-leeg want $\emptyset \in P$ (of: $\{\pi\} \in P$). Stel dat $\mathcal{C} = \{C_i \mid i \in I\}$ een keten in P is. Dan is ook $\bigcup_{i \in I} C_i$ een element van P (en dus, in P, een bovengrens voor de keten $\mathcal{C}$): immers, als $\{a_1, \dots, a_n\}$ een niet-lege, eindige deelverzameling van $\bigcup_{i \in I} C_i$ is, is er, vanwege de keten-eigenschap, al een $i \in I$ zodat $\{a_1, \dots, a_n\} \subseteq C_i$. En omdat $C_i \in P$, geldt $a_1^2 + \cdots + a_n^2 \notin \mathbb{Q}$.

We concluderen dat $(P, \leq)$ aan de voorwaarden van het Lemma van Zorn voldoet en dus, met dat lemma, een maximaal element heeft. Noem dit element A. Eigenschap i) geldt voor A, omdat $A \in P$.

Stel nu $x \in \mathbb{R} - A$. Dan is, vanwege de maximaliteit van A in P, de verzameling $A \cup \{x\}$ geen element van P en dus is er een niet-lege deelverzameling $\{a_1, \dots, a_k\}$ van $A \cup \{x\}$ zodat $a_1^2 + \cdots + a_k^2 \in \mathbb{Q}$. En één van de a_i-tjes is gelijk aan x (want anders was $\{a_1, \dots, a_k\} \subseteq A$, wat strijdig is met $A \in P$). Als $k = 1$ en dus $\{a_1, \dots, a_k\} = \{x\}$, dan geldt kennelijk $x^2 \in \mathbb{Q}$. Als $k > 1$ en $x = a_k$ (wat we wel mogen veronderstellen), dan is er een niet-lege deelverzameling $\{a_1, \dots, a_n\} \subseteq A$ (voor $n = k - 1$) zodat $x^2 + a_1^2 + \cdots + a_n^2 \in \mathbb{Q}$.

Opgave 3. In deze opgave gaan we uit van het feit dat er een welordening L bestaat die overaftelbaar is, terwijl voor elke $l \in L$ het beginsegment $L_l = \{x \in L \mid x < l\}$ aftelbaar is. Zo'n welordening L noemen we *van type* ω_1.

a) (5) Stel L is van type ω_1. Laat zien, dat elke aftelbare deelverzameling van L een bovengrens heeft in L.

b) (5) Stel, dat L_1 en L_2 beide welordeningen van type ω_1 zijn. Bewijs dat er een inbedding bestaat van L_1 in L_2. Concludeer, dat L_1 en L_2 isomorf zijn.

Uitwerking: a) Laat $\{x_0, x_1, \ldots\} \subseteq L$ een aftelbare deelverzameling van L zijn. De deelverzameling A van L gegeven door

$$A \;=\; \{x \in L \,|\, \text{ er is een } i \text{ met } x < x_i\}$$

is aftelbaar, want dit is $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} L_{x_i}$ en dus een aftelbare vereniging van aftelbare verzamelingen. Omdat L overaftelbaar is, is $L - A$ niet-leeg, en elk element van $L - A$ is een bovengrens voor de verzameling $\{x_0, x_1, \ldots\}$, omdat L een lineaire ordening is.

b) We definiëren en inbedding f van L_1 in L_2 door middel van recursie op L_1:

$$\begin{array}{rcl} f(0_{L_1}) & = & 0_{L_2} \\ f(x+1) & = & f(x)+1 \\ f(c) & = & \text{kleinste bovengrens in } L_2 \text{ van } \{f(y) \,|\, y < c\} \\ & & \text{als } c \text{ een limiet-element is} \end{array}$$

Met inductie op L_1 zien we gemakkelijk in dat voor elke $x \in L_1$ de afbeelding f beperkt tot $(L_1)_x$ injectief is, dus een aftelbaar beeld heeft, en dus goed gedefinieerd is. Dus de hele f is goed gedefinieerd, en een inbedding. Vanwege de symmetrie is f een isomorfisme.

Opgave 4. In deze opgave nemen we de taal $L = \{\leq, \perp\}$ waar $\leq$ en $\perp$ twee 2-plaatsige relatiesymbolen zijn. We beschouwen ook de L-structuur $\mathbb{N}$ waarin $\leq$ de gewone ordening is en $x \perp y$ betekent: $\text{ggd}(x, y) = 1$.

a) (3) Geef een L-formule $\phi_1(x)$ in één vrije variabele x, die in $\mathbb{N}$ het getal 1 definieert, d.w.z. voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt: $\mathbb{N} \models \phi_1(n) \Leftrightarrow n = 1$

b) (4) Geef een L-formule $\phi_{\text{pr}}(x)$ in één vrije variabele x, die in $\mathbb{N}$ de priemgetallen definieert ($\mathbb{N} \models \phi_{\text{pr}}(n) \Leftrightarrow n$ is een priemgetal)

c) (3) Geef een L-formule ϕ_{prm} die in $\mathbb{N}$ de machten van priemgetallen definieert.

Uitwerking: a) Bijvoorbeeld

$$\exists y(y \leq x \wedge \neg(y = x) \wedge \forall z(z \leq x \rightarrow z = y \vee z = x))$$

(x is het op één na kleinste element)
b) Bijvoorbeeld

$$\forall y(\phi_1(y) \to y \leq x \wedge \neg(y = x)) \wedge \forall z \forall w(\phi_1(z) \wedge z \leq w \wedge w \leq x \wedge \neg(w = x) \to w \perp x)$$

($x > 1$ en onderling ondeelbaar met elke w xodat $1 \leq w < x$)
c) Bijvoorbeeld

$$\forall y(\phi_1(y) \to y \leq x) \wedge (\phi_1(x) \vee \forall y \forall z(\phi_{\mathrm{pr}}(y) \wedge \phi_{\mathrm{pr}}(z) \wedge \neg(y \perp x) \wedge \neg(z \perp x) \to y = z))$$

($x \geq 1$ en er is ten hoogste één priemgetal dat niet onderling ondeelbaar is met x)

Opgave 5. Laat $(X, \leq)$ een poset zijn. In deze opgave bewijzen we met behulp van de Compactheidsstelling, dat er een lineaire ordening $(L, \leq)$ is en een injectieve, ordebewarende functie van X naar L.

a) (3) Bewijs dit eerst, voor het geval dat X eindig is.

b) (4) Beschouw in een taal L met 2-plaatsig relatiesymbool $\leq$ en constanten $\{c_x \,|\, x \in X\}$ de theorie bestaande uit de volgende L-zinnen:

   i) De axioma's voor een lineaire ordening
   ii) De zinnen $\neg(c_x = c_y)$ voor alle $x, y \in X$ met $x \neq y$
   iii) De zinnen $c_x \leq c_y$ voor alle $x, y \in X$ met $x \leq y$

   Bewijs met behulp van de Compactheidsstelling dat deze theorie consistent is.

c) (3) Leid uit b) het gewenste resultaat af.

Uitwerking: a) We doen dit met inductie naar $|X|$. Voor $X = \emptyset$ is de bewering triviaal (de unieke ordening op $\emptyset$ is lineair). Stel $|X| = n + 1$. Het is makkelijk in te zien dat X een maximaal element heeft, zeg x_0. Volgens de inductiehypothese is er een injectieve, ordebewarende functie f van $X - \{x_0\}$ naar een een lineaire ordening $(Y, \leq)$. Laat Y' uit Y ontstaan door een nieuw element y_0 toe te voegen dat groter is dan alle elementen uit Y. Dan is ook Y' lineair geordend en we definiëren $g : X \to Y'$ door: $g(x) = f(x)$ als $x \neq x_0$; $g(x_0) = y_0$. Nu is ook g injectief en ordebewarend.
b) Laat T een eindige deelverzameling van de gegeven theorie zijn. Dan bevat T maar eindig veel van de zinnen in ii) en iii), dus er komen maar eindig veel

c_x-en voor in T. Zij X' de verzameling van die $x \in X$ waarvoor c_x in T voorkomt. Dan is X' een eindige poset (met de ordening van X), en met deeltje a) kan X' dus ordebewarend worden ingebed in een lineaire ordening Y, zeg via $f : X' \to Y$. Dan is Y een model voor T, als we definiëren dat $(c_x)^Y = f(x)$. Dus T is consistent. T was een willekeurige eindige deelverzameling van de gegeven theorie, dus met de Compactheidsstelling concluderen we dat deze consistent is.
c) Laat Y een model zijn van de theorie in b). Dan is Y een lineaire ordening (vanwege i)), en de afbeelding $f : X \to Y$ gegeven door $f(x) = (c_x)^Y$ is injectief (vanwege ii)) en ordebewarend (vanwege iii)).