Herkansingstentamen Grondslagen van de Wiskunde, 22 maart 2016, 09.00-12.00

Dit tentamen bevat 5 opgaven; zie ook de ommezijde.
Alle opgaven tellen even zwaar (10 punten); je cijfer is het totaal aantal punten, gedeeld door 5. Als een opgave uit meerdere deeltjes bestaat, staat bij elk deeltje hoeveel van de 10 punten dat deeltje waard is.
Advies: maak eerst die opgaven, die je kunt; en ga dan nadenken over de rest. Succes!

Opgave 1. Bepaal van elk van de onderstaande verzamelingen of hij eindig, aftelbaar oneindig of overaftelbaar is. Motiveer je antwoord.

a) (3) $\{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \,|\, \exists k \in \mathbb{N}_{>0} \forall n \in \mathbb{N}(f(n) = f(n+k))\}$

b) (3) $\{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \,|\, \forall x \in \mathbb{N} f(f(f(x))) = x\}$

c) (4) $\{A \subseteq \mathbb{N} \,|\, \forall x, y \in \mathbb{N}((x \in A \wedge y \in A) \to xy \in A)\}$

Opgave 2.

a) (5) Bewijs met behulp van het Lemma van Zorn dat er een deelverzameling A van $\mathbb{R}_{>0}$ is, die maximaal is m.b.t. de eigenschap, dat als $x, y \in A$, dan $xy \notin A$.

b) (5) Zij A als in deeltje a). Bewijs: voor elke $x \in \mathbb{R}_{>0} - A$ geldt: als $x^2 \notin A$, dan zijn er $a, b \in A$ zodat $x = \frac{a}{b}$.

Opgave 3. Bewijs door middel van natuurlijke deductie:

a) (4) $\phi \wedge \exists x\psi \vdash \exists x(\phi \wedge \psi)$

b) (3) $\phi \to \exists x\psi \vdash \exists x(\phi \to \psi)$

c) (3) $\phi \vee \forall x\psi \vdash \forall x(\phi \vee \psi)$

Hierbij is gegeven, dat steeds de variabele x niet in ϕ voorkomt.

Opgave 4. Laat L de taal $\{<, f\}$ zijn, waar $<$ een 2-plaatsig relatiesymbool is en f een 1-plaatsig functiesymbool. Geef voor elk van de vier onderstaande L-structuren een L-zin, die waar is in die structuur, maar onwaar in alle andere structuren.

a) (2) $M_0 = \mathbb{R}$ met $<^{M_0} = \{(x, y) \mid x < y\}$ en $f^{M_0}(x) = x^2$

b) (3) $M_1 = \mathbb{Z}$ met $<^{M_1} = \{(n, m) \mid n|m\}$ en $f^{M_1}(n) = n + 1$

c) (2) $M_2 = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ met $<^{M_2} = \{(A, B) \mid A \subseteq B\}$ en $f^{M_2}(A) = \mathbb{N} - A$

d) (3) $M_3 = \mathbb{Q}_{>0}$ met $<^{M_3} = \{(x, y) \mid x^2 < y\}$ en $f^{M_3}(x) = \frac{1}{x}$

Opgave 5. Een ordinaalgetal α heet *regulier* als er geen ordinaalgetal $\beta < \alpha$ en functie $f : \beta \to \alpha$ bestaan zodat geldt: $\forall y \in \alpha \exists x \in \beta (y \subseteq f(x))$

a) (5) Bewijs, dat elk regulier ordinaalgetal een kardinaalgetal is.

b) (5) Met ω_1 duiden we het kleinste overaftelbare ordinaalgetal aan. Bewijs dat ω_1 regulier is.