Herkansingstentamen Grondslagen van de Wiskunde, 10 maart 2015, 08.30-11.30

DIT TENTAMEN BEVAT 5 OPGAVEN; ZIE OOK DE OMMEZIJDE.
Alle opgaven tellen even zwaar (10 punten); je cijfer is het totaal aantal punten, gedeeld door 5. Als een opgave uit meerdere deeltjes bestaat, staat bij elk deeltje hoeveel van de 10 punten dat deeltje waard is.
Advies: maak eerst die opgaven, die je kunt; en ga dan nadenken over de rest. Succes!

Opgave 1. Bepaal van elk van de onderstaande verzamelingen of hij eindig, aftelbaar oneindig of overaftelbaar is. Motiveer je antwoord.

a) (3) $\{A \subseteq \mathbb{N} \,|\, A \text{ is oneindig en } \mathbb{N} - A \text{ is oneindig}\}$

b) (3) $\{A \subseteq \mathbb{N} \,|\, \text{voor elke oneindige } B \subseteq \mathbb{N} \text{ is } A \cap B \text{ oneindig}\}$

c) (2) $\{A \subseteq \mathbb{N} \,|\, \text{voor elke oneindige } B \subseteq \mathbb{N} \text{ is } A \cap B \neq \emptyset\}$

d) (2) $\{x \in \mathbb{R} \mid \sin(x) \notin \mathbb{Q}\}$

Opgave 2. Een *welordening* is, zoals bekend, een lineaire ordening waarin elke niet-lege deelverzameling een kleinste element heeft. Stel W is een welordening, P een partiële ordening, en $f : W \to P$ een ordebewarende functie, d.w.z. als $x \leq y$ in W, dan $f(x) \leq f(y)$ in P. Zij E het beeld van f in P, met de ordening van P.

a) (5) Bewijs, dat E een welordening is.

b) (5) Laat zien dat er een functie $g : E \to W$ is met de eigenschappen:

   i) g is een sectie van f, d.w.z. $f(g(x)) = x$ voor alle $x \in E$

   ii) als x een limiet-element in E is, is $g(x)$ een limiet-element in W

Opgave 3. Bewijs door middel van natuurlijke deductie:

a) (4) $\phi \vee (\psi \to \chi) \vdash \psi \to (\phi \vee \chi)$

b) (3) $\forall x(\phi \to \psi(x)) \vdash \phi \to \forall x \psi(x)$, waarbij gegeven is dat de variabele x niet in ϕ voorkomt.

c) (3) $\exists x(\phi \vee \psi(x)) \vdash \phi \vee \exists x \psi(x)$, waarbij gegeven is dat de variabele x niet in ϕ voorkomt.

Opgave 4. Stel T is een theorie in een aftelbare taal L; we gaan ervan uit dat T een oneindig model heeft en dat T κ-categorisch is voor een oneindig kardinaalgetal κ. De theorie T' bestaat uit die L-zinnen, die waar zijn in elk oneindig model van T. Bewijs, dat T' volledig is [Hint: gebruik de Löwenheim-Skolemstellingen].

Opgave 5. Een *monoïde* is een structuur voor de taal $L = \{e; \cdot\}$, waar e een constante is en $\cdot$ een 2-plaatsig functiesymbool, die aan de volgende axioma's voldoet:

$$\forall x\,(e{\cdot}x = x \wedge x{\cdot}e = x)$$
$$\forall xyz\,(x{\cdot}(y{\cdot}z) = (x{\cdot}y){\cdot}z)$$

Zij A een vast gekozen verzameling met minstens 2 elementen. Zij M de verzameling van alle functies $A \to A$. We maken M tot een L-structuur door te definiëren: e^M is de identieke functie, en $(\cdot)^M$ is compositie van functies (dus $(g{\cdot}f)(x) = g(f(x))$).

a) Ga na, dat M een monoïde is.

b) Geef een L-formule $\varphi(x)$ zodat voor alle $m \in M$ geldt:

$$M \models \varphi(m) \Leftrightarrow \text{de functie } m : A \to A \text{ is injectief}$$

c) Geef een L-formule $\varphi(x)$ zodat voor alle $m \in M$ geldt:

$$M \models \varphi(m) \Leftrightarrow \text{de functie } m : A \to A \text{ is constant}$$