

Tentamen Grondslagen van de Wiskunde B

DIT TENTAMEN BEVAT 5 OPGAVEN; ZIE OOK DE OMMEZIJDE.

30 januari 2014, 13.30-16.30

Alle opgaven tellen even zwaar (10 punten); je cijfer is het totaal aantal punten, gedeeld door 5. Als een opgave uit meerdere deeltjes bestaat, staat bij elk deeltje hoeveel van de 10 punten dat deeltje waard is.

Advies: maak eerst die opgaven, die je kunt; en ga dan nadenken over de rest. Succes!

Opgave 1. In deze opgave beschouwen we de theorie T_{dep} van *dichte lineaire ordeningen met eindpunten*. De taal bevat één binair relatiesymbool $<$ en de axioma's zijn:

$$\begin{array}{ll} \forall x \neg(x < x) & \forall x \forall y \forall z (x < y \wedge y < z \rightarrow x < z) \\ \forall x \forall y (x < y \vee x = y \vee y < x) & \forall x \forall y (x < y \rightarrow \exists z (x < z \wedge z < y)) \\ \exists z \forall x (x = z \vee z < x) & \exists w \forall y (x = w \vee y < w) \end{array}$$

- (3) Laat zien dat T_{dep} twee modellen N and M heeft waarvoor geldt dat M een substructuur is van N , maar geen elementaire substructuur.
- (2) Toon aan dat T_{dep} geen kwantoreliminatie heeft.
- (3) Laat zien dat T_{dep} ω -categorisch is.
- (2) Laat zien dat T_{dep} volledig is.

Opgave 2. In deze opgave is $L = L_{\text{rings}} = \{0, 1, +, \cdot\}$. We beschouwen de L -structuur \mathbb{R} met de gewone ringstructuur, en de taal $L_{\mathbb{R}} = L \cup \{c_x \mid x \in \mathbb{R}\}$, waar c_x een nieuwe constante is. We zien \mathbb{R} als $L_{\mathbb{R}}$ -structuur door te zetten: $(c_x)^{\mathbb{R}} = x$. Laat $E(\mathbb{R})$ de verzameling van alle $L_{\mathbb{R}}$ -zinnen zijn die waar zijn in \mathbb{R} .

- (5) Laat zien: als $\phi(x)$ een kwantorvrije $L_{\mathbb{R}}$ -formule met één vrije variabele x is, dan is de verzameling

$$\{r \in \mathbb{R} \mid \mathbb{R} \models \phi(r)\}$$

hetzij eindig, hetzij co-eindig (als deelverzameling van \mathbb{R}).

- (5) Bewijs dat de theorie $E(\mathbb{R})$ geen kwantoreliminatie heeft.

Opgave 3. In deze opgave staan drie beweringen. De vraag is steeds: bewijs de bewering door een bewijsboom te construeren, of weerleg de bewering door een tegenmodel te geven.

- a) (3) $\forall x(g(f(x)) = x) \vdash \forall x\forall y(f(x) = f(y) \rightarrow x = y)$
- b) (3) $(\exists x\phi(x)) \wedge (\exists x\psi(x)) \vdash \exists x(\phi(x) \wedge \psi(x))$
- c) (4) $\neg\phi \rightarrow \psi \vdash \neg\psi \rightarrow \phi$

Opgave 4. Ter herinnering: als $L \subseteq L'$ twee talen zijn, T een L -theorie en T' een L' -theorie zodat $T \subset T'$, dan heet T' *conservatief over T* als voor elke L -zin ϕ waarvoor $T' \vdash \phi$, reeds geldt dat $T \vdash \phi$.

Laten nu een taal L en een L -theorie T vast gekozen zijn.

- a) (5) Stel $\phi(x_1, \dots, x_n, y)$ is een L -formule met $n + 1$ vrije variabelen. Zij $L' = L \cup \{f\}$, waar f een nieuw n -plaatsig functiesymbool is, en T' de L' -theorie

$$T \cup \{\forall \vec{x}(\exists y\phi(\vec{x}, y) \rightarrow \phi(\vec{x}, f(\vec{x})))\}$$

Laat zien dat wanneer M een model van T is, we een interpretatie $f^M : M^n \rightarrow M$ van het functiesymbool f in M kunnen definiëren, zodanig dat de resulterende L' -structuur M een model van T' is.

- b) (5) Laten L, L', T, T' als in a) zijn. Concludeer uit a), met behulp van de Volledigheidsstelling, dat T' conservatief is over T .

Opgave 5. In deze opgave definiëren we voor ordinaalgetallen de optelling en de vermenigvuldiging als volgt:

$$\begin{aligned} \alpha + 0 &= \alpha & \alpha \cdot 0 &= 0 \\ \alpha + (\beta + 1) &= (\alpha + \beta) + 1 & \alpha \cdot (\beta + 1) &= (\alpha \cdot \beta) + \alpha \\ \alpha + \gamma &= \bigcup\{\alpha + \beta \mid \beta \in \gamma\} & \alpha \cdot \gamma &= \bigcup\{\alpha \cdot \beta \mid \beta \in \gamma\} \end{aligned}$$

Hierbij is in de laatste regel aangenomen dat γ een niet-leeg limietordinaalgetal is.

- a) (3) Laat zien dat voor elke niet-lege verzameling x van ordinaalgetallen en elk ordinaalgetal α , de volgende twee gelijkheden gelden:

$$\begin{aligned} \alpha + \bigcup x &= \bigcup\{\alpha + \beta \mid \beta \in x\} \\ \alpha \cdot \bigcup x &= \bigcup\{\alpha \cdot \beta \mid \beta \in x\} \end{aligned}$$

- b) (4) Laat zien dat de volgende distributieve wet geldt:

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = (\alpha \cdot \beta) + (\alpha \cdot \gamma)$$

Hint: inductie naar γ . Gebruik deeltje a).

- c) (3) Laat door een tegenvoorbeeld zien dat de volgende wet *niet* geldt:

$$(\alpha + \beta) \cdot \gamma = (\alpha \cdot \gamma) + (\beta \cdot \gamma)$$