Herkansingstentamen Grondslagen van de Wiskunde, 3 januari 2013, 13.30-16.30
Met beknopte uitwerking

DIT TENTAMEN BEVAT 5 OPGAVEN; ZIE OOK DE OMMEZIJDE.
Alle opgaven tellen even zwaar (10 punten); je cijfer is het totaal aantal punten, gedeeld door 5. Als een opgave uit meerdere deeltjes bestaat, staat bij elk deeltje hoeveel van de 10 punten dat deeltje waard is.
Advies: maak eerst die opgaven, die je kunt; en ga dan nadenken over de rest. Succes!

Opgave 1.

a) (5) Laat $A = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \,|\, \{x \,|\, f(x) \neq x\} \text{ is eindig}\}$

Bewijs: A is aftelbaar oneindig.

b) (5) Laat $B = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \,|\, \forall x(f(f(x)) = x)\}$

Bewijs: $|B| = 2^\omega$

Uitwerking: a) Voor elke functie f in A is er een eindig rijtje natuurlijke getallen $(y_0, \dots, y_n)$ zo dat $f(i) = y_i$ voor alle $i \leq n$, en $f(i) = i$ voor alle $i \geq n$. Dit levert een injectieve functie op van A naar de verzameling van eindige rijtjes natuurlijke getallen. De laatste verzameling is aftelbaar, dus A is aftelbaar. Dat A oneindig is, is makkelijk.
b) Omdat $B \subset \mathbb{N}^\mathbb{N}$ en $|\mathbb{N}^\mathbb{N}| = 2^\omega$, zien we dat $|B| \leq 2^\omega$. We moeten de omgekeerde ongelijkheid bewijzen, zodat we tot $|B| = 2^\omega$ kunnen concluderen met de stelling van Cantor-Schröder-Bernstein. Definieer een functie $F : \{0,1\}^\mathbb{N} \to B$ als volgt: als $\alpha(k) = 0$ dan is $F(\alpha)(2k) = 2k$ en $F(\alpha)(2k+1) = 2k+1$; als $\alpha(k) = 1$ dan is $F(\alpha)(2k) = 2k+1$ en $F(\alpha)(2k+1) = 2k$. Bewijs zelf dat $F(\alpha) \in B$, en dat F injectief is.

Opgave 2.

a) (4) Bewijs met behulp van het Lemma van Zorn dat er een deelverzameling X van $\mathbb{R}$ is die maximaal is met betrekking tot de eigenschappen:

  i) $0 \in X$

  ii) voor elk rijtje $(x_1, \dots, x_k)$ van elementen van X geldt dat $x_1 + \cdots + x_k \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}_{>0}$

b) (3) Zij X als in deeltje a). Bewijs dat X gesloten is onder de optelling: als $x, y \in X$ dan is $x + y \in X$

c) (3) Zij X als in deeltje a). Bewijs: voor elke $y \in \mathbb{R}$ geldt dat als $y \notin X$, dan $-y \in X$.

Uitwerking: a) Neem de poset P van die deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ die aan i) en ii) voldoen. P is niet-leeg want $\{0\} \in P$. Stel C is een keten in P. Als $C = \emptyset$, dan is $\{0\}$ een bovengrens voor C; als $C \neq \emptyset$ dan is $\bigcup C$ een bovengrens voor C in P: immers, als er een eindig rijtje uit $\bigcup C$ optelt tot een positief rationaal getal, dan is er (vanwege de keten-eigenschap) al een element van C waaruit we dat rijtje kunnen halen; tegenspraak met de aanname dat alle elementen van C in P zitten. P voldoet dus aan de voorwaarden van het Lemma van Zorn; en we concluderen dat P een maximaal element X heeft, als verlangd.
b) Stel $x, y \in X$ en $x+y \notin X$. Vanwege de maximaliteit van X geldt dan dat $X \cup \{x+y\}$ niet meer aan ii) kan voldoen; er is dus een rijtje uit $X \cup \{x+y\}$ dat optelt tot een positief rationaal getal. In dat rijtje komt een aantal keren $x+y$ voor: schrijf het als $(\ldots, x+y, \ldots, x+y, \ldots)$. Maar als we in dat rijtje overal $x + y$ vervangen door x, y, m.a.w. we krijgen $(\ldots, x, y, \ldots, x, y, \ldots)$, dan hebben we een rijtje uit X dat natuurlijk dezelfde som heeft als het oorspronkelijke rijtje. Tegenspraak met het feit dat X aan ii) voldoet. Dus X is gesloten onder de optelling.
c) Stel $y \notin X$ en $-y \notin X$. Met dezelfde redenering als in b) is er dan een rijtje uit $X \cup \{y\}$ dat optelt tot een positief rationaal getal; omdat X gesloten is onder optelling vinden we $x \in X$ en $n \in \mathbb{N}_{>0}$ zodat $x+ny \in \mathbb{Q}_{>0}$. Op dezelfde manier vinden we $x' \in X$ en $m \in \mathbb{N}_{>0}$ zodat $x' - my \in \mathbb{Q}_{>0}$. Omdat $\mathbb{Q}_{>0}$ gesloten is onder de optelling, zien we dat $mx + nx' \in \mathbb{Q}_{>0}$. Maar dat geeft ons een rijtje

$$(\underbrace{x, \ldots, x}_{m}, \underbrace{x', \ldots, x'}_{n})$$

van elementen van X dat optelt tot een positief rationaal getal; tegenspraak.

Opgave 3. Stel dat L een taal is en T een L-theorie die kwantoreliminatie heeft. Laten M_1 en M_2 modellen van T zijn, en $N_1 \subset M_1$ en $N_2 \subset M_2$ substructuren. Stel $a \in N_1$, $b \in N_2$. Bewijs dat de volgende twee uitspraken equivalent zijn:

i) Voor elke kwantorvrije L-formule $\varphi(x)$ met één vrije variabele x geldt

$$N_1 \models \varphi(\bar{a}) \;\Leftrightarrow\; N_2 \models \varphi(\bar{b})$$

ii) Voor elke L-formule $\psi(x)$ met één vrije variabele x geldt

$$M_1 \models \psi(\bar{a}) \;\Leftrightarrow\; M_2 \models \psi(\bar{b})$$

Uitwerking: i)$\Rightarrow$ii): neem i) aan en stel $M_1 \models \psi(\bar{a})$. Vanwege kwantoreliminatie is er een kwantorvrije L-formule $\varphi(x)$ zodat $T \models \forall x(\psi(x) \leftrightarrow \varphi(x))$. Omdat M_1 een model is van T, volgt $M_1 \models \varphi(\bar{a})$. Omdat N_1 een substructuur van M_1 is en φ kwantorvrij, volgt $N_1 \models \varphi(\bar{a})$. Met i) volgt $N_2 \models \varphi(\bar{b})$ en weer, omdat φ kwantorvrij en N_2 een substructuur van M_2, volgt $M_2 \models \varphi(\bar{b})$. Omdat M_2 een model is van T en vanwege de keuze van φ, volgt $M_2 \models \psi(\bar{b})$. De andere kant op gaat natuurlijk identiek zo, dus dit bewijst ii).

Voor ii)$\Rightarrow$i): neem ii) aan. Dan geldt ii) in het bijzonder voor alle kwantorvrije formules φ, en zoals we in het eerste stuk hebben gezien, geldt $M_1 \models \varphi(\bar{a}) \Leftrightarrow N_1 \models \varphi(\bar{a})$ (en het analoge voor M_2 en N_2). We hebben dus

$$N_1 \models \varphi(\bar{a}) \Leftrightarrow M_1 \models \varphi(\bar{a}) \Leftrightarrow M_2 \models \varphi(\bar{b}) \Leftrightarrow N_2 \models \varphi(\bar{b})$$

Opgave 4. Laat met bewijsbomen zien:

a) (3) $\neg\phi \wedge (\psi \to \chi) \vdash (\phi \vee \psi) \to \chi$

b) (4) $\neg R(a) \to S(a, y) \vdash \exists x(R(x) \vee S(x, y))$

c) (3) $\phi \to (\phi \to \psi) \vdash (\phi \vee \phi) \to \psi$

a)

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\phi \vee \psi^1$}
\AxiomC{ϕ^2}
\AxiomC{$\neg\phi \wedge (\psi \to \chi)^3$}
\RightLabel{$\wedge$E}
\BinaryInfC{$\neg\phi$}
\RightLabel{$\neg$E}
\UnaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$\bot$E}
\UnaryInfC{χ}
\AxiomC{ψ^4}
\AxiomC{$\neg\phi \wedge (\psi \to \chi)^3$}
\RightLabel{$\wedge$E}
\UnaryInfC{$\psi \to \chi$}
\RightLabel{$\to$E}
\BinaryInfC{χ}
\RightLabel{$\vee$E,2,4}
\TrinaryInfC{χ}
\RightLabel{$\to$I, 1}
\UnaryInfC{$(\phi \vee \psi) \to \chi$}
\end{prooftree}
$$

b)

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{\neg R(a)\to S(a,y)^1}
\AxiomC{R(a)^2}
\RightLabel{\vee\text{I}}
\UnaryInfC{R(a)\vee S(a,y)}
\RightLabel{\exists\text{I}}
\UnaryInfC{\exists x(R(x)\vee S(x,y))}
\AxiomC{\neg\exists x(R(x)\vee S(x,y))^3}
\RightLabel{\neg\text{E}}
\BinaryInfC{\bot}
\RightLabel{\neg\text{I,2}}
\UnaryInfC{\neg R(a)}
\RightLabel{\to\text{E}}
\BinaryInfC{S(a,y)}
\RightLabel{\vee\text{I}}
\UnaryInfC{R(a)\vee S(a,y)}
\RightLabel{\exists\text{I}}
\UnaryInfC{\exists x(R(x)\vee S(x,y))}
\AxiomC{\neg\exists x(R(x)\vee S(x,y))^3}
\BinaryInfC{\bot}
\RightLabel{\bot\text{E,3}}
\UnaryInfC{\exists x(R(x)\vee S(x,y))}
\end{prooftree}
$$

c)

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{\phi\vee\phi^4}
\AxiomC{\phi^1}
\AxiomC{\phi^1}
\AxiomC{\phi\to(\phi\to\psi)^3}
\RightLabel{\to\text{E}}
\BinaryInfC{\phi\to\psi}
\RightLabel{\to\text{E}}
\BinaryInfC{\psi}
\AxiomC{\phi^2}
\AxiomC{\phi^2}
\AxiomC{\phi\to(\phi\to\psi)^3}
\RightLabel{\to\text{E}}
\BinaryInfC{\phi\to\psi}
\RightLabel{\to\text{E}}
\BinaryInfC{\psi}
\RightLabel{\vee\text{E,1,2}}
\TrinaryInfC{\psi}
\RightLabel{\to\text{I,4}}
\UnaryInfC{(\phi\vee\phi)\to\psi}
\end{prooftree}
$$

Opgave 5. Laat X een oneindige verzameling zijn.

a) (5) Bewijs m.b.v. Hartogs' Lemma dat er een ordinaalgetal α is met de eigenschap dat er geen injectieve functie $\alpha \to X$ is.

b) (5) Zij α_X het *kleinste* ordinaalgetal dat aan a) voldoet. Bewijs dat α_X een kardinaalgetal is.

a) Hartogs' Lemma beweert dat er een welgeordende verzameling $(Y, <)$ is zodat er geen injectie $Y \to X$ is. We moeten dus inzien dat er een ordinaalgetal α is en een bijectie $\alpha \to Y$. Definieer met recursie op de welordening R:

$$F(x) \;=\; \{F(y) \mid y < x\}$$

Dan is het beeld van X onder de functie X een verzameling (met Replacement), en een ordinaalgetal: er geldt: $y < y' \Leftrightarrow F(y) \in F(y')$
b) Stel α_X is geen kardinaalgetal. Dan is er een ordinaalgetal $\beta < \alpha_X$ zodat er een bijectie van α_X op β is. Maar er kan dan geen injectie $\beta \to X$ zijn (anders was er, door samenstellen, ook een injectie $\alpha_X \to X$). Dit is in strijd met de minimale keuze van α_X.