Herkansingstentamen Grondslagen van de Wiskunde, 15 maart 2012, 14.00-17.00 met uitwerkingen

Dit tentamen bevat 5 opgaven; zie ook de ommezijde.
Alle opgaven tellen even zwaar (10 punten); je cijfer is het totaal aantal punten, gedeeld door 5. Als een opgave uit meerdere deeltjes bestaat, staat bij elk deeltje hoeveel van de 10 punten dat deeltje waard is.
Advies: maak eerst die opgaven, die je kunt; en ga dan nadenken over de rest. Succes!

Opgave 1. Stel $(P, \leq)$ is een poset. We noemen $(P, \leq)$ *welgefundeerd* als er geen oneindig strict dalend rijtje $x_0 > x_1 > x_2 > \cdots$ in P bestaat.

a) (5) Stel $(P, \leq)$ is welgefundeerd. Laat X een deelverzameling van P zijn. Stel dat voor alle $p \in P$ geldt: als $\{q \in P \,|\, q < p\} \subseteq X$, dan $p \in X$. Bewijs dat $X = P$.

b) (5) Stel $(P, \leq)$ is welgefundeerd. Laat L een welgeordende verzameling zijn met $|L| > |P|$. Bewijs dat er een unieke functie $f : P \to L$ is met de eigenschappen:

   i) als $p < q \in P$ dan $f(p) < f(q)$ in L

   ii) als $x = f(p)$ en $y < x$ in L, dan is er een $q < p$ in P zodat $y = f(q)$

   [Hint: beschouw de deelverzameling X van P die bestaat uit die elementen p van P waarvoor geldt dat er een unieke functie $f_p : \{q \in P \,|\, q \leq p\} \to L$ bestaat die aan i) en ii) voldoet]

Uitwerking: a) Neem aan dat voor alle $p \in P$ geldt: als $\{q \in P \,|\, q < p\} \subseteq X$, dan $p \in X$. Stel $X \neq P$; dan is er een $p_0 \in P - X$. Volgens de aanname is dan $\{q \in P \,|\, q < p\} \nsubseteq X$, dus is er een $p_1 < p_0$ met $p_1 \notin X$. Weer de aanname gebruikend, vinden we $p_2 < p_1$ met $p_2 \notin X \ldots$ We vinden een oneindig strict dalend rijtje in P, in strijd met de aanname dat P welgefundeerd is.
b) We volgen de hint en beschouwen de deelverzameling X als gegeven in de hint. Stel $p \in P$, en $\{q \in P \,|\, q < p\} \subseteq X$. Dus voor alle $q < p$ is er een unieke $f_q : \{r \in P \,|\, r \leq q\} \to L$ die aan i) en ii) voldoet. Merk op dat, wanneer $r < q < p$, de functies f_r en $f_q \restriction \{s \in P \,|\, s \leq r\}$ allebei aan i) en ii) voldoen, dus wegens de uniciteit zijn ze gelijk. Hieruit volgt dat de functie

$g_p : \{q \in P \mid q < p\} \to L$, die gedefinieerd is door: $g_p(q) = f_q(q)$, ook aan i) en ii) voldoet. Er is maar één manier om de functie g_p uit te breiden tot $f_p : \{q \in P \mid q \leq p\} \to L$ die aan i) en ii) voldoet: nl. door te zetten: $f_p(p)$ is het kleinste element van L groter dan alle $g_p(q)$ voor $q < p$. Merk op dat zo'n element van L er is, want $|L| > |P|$.

Dus $p \in X$. Met a) concluderen we dat $X = P$. Dus als we zetten: $f(p) = f_p(p)$ dan hebben we f gevonden. En dat f uniek is, volgt ook makkelijk.

Opgave 2.

a) (4) Bewijs met behulp van het Lemma van Zorn dat er een verzameling $P \subset \mathbb{R}_{>0}$ is die maximaal is met betrekking tot de eigenschappen:

   i) voor alle $x, y \in P$ geldt $x + y \in P$

   ii) $1 \notin P$

b) (3) Zij P als in deeltje a). Bewijs: $(1, \infty) \subset P$

c) (3) Zij P als in deeltje a). Bewijs: als $a \in \mathbb{R}_{>0}$, $a \notin P$, $a \neq 1$, dan is er een $m > 0$ zodat hetzij $a = \frac{1}{m}$, hetzij $a = \frac{1-p}{m}$ voor een $p \in P$.

   [Hint: beschouw de verzameling $\{na \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\} \cup \{ma + p \mid m \in \mathbb{N}, p \in P\}$]

uitwerking: a) is een standaardtoepassing van het Lemma van Zorn.
b) Je gaat makkelijk na dat als P is als in a), de verzameling $P \cup (1, \infty)$ ook aan i) en ii) voldoet. Uit de maximaliteit van P volgt nu, dat $P = P \cup (1, \infty)$ oftewel $(1, \infty) \subseteq P$ als verlangd.
c) Laat X de verzameling uit de hint zijn. Je gaat makkelijk na, dat $a \in X$, $P \subset X$ en dat X voldoet aan i). Uit de maximaliteit van P moet nu wel volgen, dat X niet aan ii) kan voldoen. Dat betekent dat $1 \in X$. Hieruit leid je gemakkelijk het gevraagde af.

Opgave 3. Een *universele theorie* in een taal L is een verzameling L-zinnen die allemaal van de vorm $\forall x\phi$ zijn met ϕ kwantorvrij. We nemen aan dat de taal L tenminste één constante bevat.

In deze opgave bewijzen we de *Stelling van Herbrand*, die zegt: als T een universele L-theorie is en $T \models \exists y\psi(y)$ waarbij $\psi(y)$ kwantorvrij is, dan zijn er gesloten L-termen $t_1, \ldots, t_n$ zodat $T \models \psi(t_1) \vee \cdots \vee \psi(t_n)$.

a) (3) Stel T is een universele theorie. Bewijs: als M een model van T is, is elke substructuur van M ook een model van T

b) (3) Stel, dat voor geen enkel rijtje gesloten L-termen $t_1, \ldots, t_n$ geldt dat $T \models \psi(t_1) \vee \cdots \vee \psi(t_n)$. Laat zien dat de theorie

$$T \cup \{\neg\psi(t) \,|\, t \text{ een gesloten } L\text{-term}\}$$

consistent is

c) (3) Maak het bewijs van de stelling van Herbrand af ([Hint: beschouw voor een geschikt gekozen model M van T, de substructuur $\{t^M \,|\, t \text{ een gesloten } L\text{-term}\}$])

d) (1) Waar hebben we gebruik gemaakt van de aanname dat de taal L tenminste één constante bevat?

uitwerking: a) Stel $M \subset N$ is een substructuur. Als $\phi \equiv \forall x\psi$ een universele zin is en $N \models \phi$, dan $N \models \psi(n)$ voor alle $n \in N$, dus $N \models \psi(m)$ voor alle $m \in M$. Omdat ψ kwantorvrij is, geldt dan ook $M \models \psi(m)$ voor alle $m \in M$; dus $M \models \forall x\psi(x)$. Als T een universele theorie is en N is een model van T, dan is dus M ook een model van T.
b) Als $T \cup \{\neg\psi(t) \,|\, t \text{ een gesloten } L\text{-term}\}$ inconsistent is dan volgt uit de Compactheidsstelling dat er eindig veel $t_1, \ldots, t_n$ zijn zodat $T \cup \{\neg\psi(t_1), \ldots, \neg\psi(t_n)\}$ inconsistent is. Dat betekent dat $T \models \psi(t_1) \vee \cdots \vee \psi(t_n)$.
c) Stel, dat de conclusie van de stelling onwaar is. Uit b) volgt dan dat de theorie $T \cup \{\neg\psi(t) \,|\, t \text{ een gesloten } L\text{-term}\}$ consistent is. Deze heeft dus een model M. Kies voor deze M de substructuur van M als gegeven in de hint. Noem deze substructuur M'. Uit a) volgt, dat M' ook een model van T is, dus $M' \models \exists y\psi(y)$. Er is dus een element a van M' zodat $M' \models \psi(a)$. Maar $a = s^M$ voor zekere gesloten term s. Dus $M' \models \psi(s^M)$. Omdat ψ kwantorvrij is, volgt $M \models \psi(s^M)$. Maar dat betekent dat $M \models \psi(s)$. Dit is in strijd met de keuze van M.
d) In deeltje c). Immers als L geen constanten heeft, heeft L ook geen gesloten termen en is de substructuur M' gedefinieerd in c) de lege verzameling. Maar een structuur is nooit leeg.

Opgave 4. Bewijs met natuurlijke deductie:

a) (3) $\vdash ((\phi \to \psi) \to \phi) \to \phi$

b) (3) $\forall xA(x) \vee \forall yB(y) \vdash \forall xy(A(x) \vee B(y))$

c) (4) $\exists x(A(x) \wedge B) \vdash (\exists xA(x)) \wedge B$ (waarbij x niet in B voorkomt)

Uitwerking:
a)

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{((\phi \to \psi) \to \phi)^3 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg\phi^1 \qquad \phi^2}{\bot}\,\neg E}{\psi}\,\bot E}{\phi \to \psi}\,\to I, 2}{\phi}\,\to E \qquad \neg\phi^1}{\bot}\,\neg E}{\phi}\,\bot E, 1}{((\phi \to \psi) \to \phi) \to \phi}\,\to I, 3
$$

b)

$$
\dfrac{\forall x A(x) \vee \forall y B(y)^3 \qquad \forall I\,\dfrac{\forall I\,\dfrac{\vee I\,\dfrac{\forall E\,\dfrac{\forall x A(x)^1}{A(u)}}{A(u) \vee B(v)}}{\forall y(A(u) \vee B(y))}}{\forall xy(A(x) \vee B(y))} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall y B(y)^2}{B(v)}\,\forall E}{A(u) \vee B(v)}\,\vee I}{\forall y(A(u) \vee B(y))}\,\forall I}{\forall xy(A(x) \vee B(y))}\,\forall I}{\forall xy(A(x) \vee B(y))}\,\vee E, 1, 2
$$

c)

$$
\dfrac{\exists x(A(x) \wedge B)^1 \qquad \dfrac{\exists I\,\dfrac{\wedge E\,\dfrac{A(u) \wedge B^2}{A(u)}}{\exists x A(x)} \qquad \dfrac{A(u) \wedge B^2}{B}\,\wedge E}{(\exists x A(x)) \wedge B}\,\wedge I}{(\exists x A(x)) \wedge B}\,\exists E, 2
$$

Merk op dat zonder de aanname dat x niet in B voorkomt, de laatste $\exists$-eliminatie niet toegestaan zou zijn: immers de variabele u zou nog voorkomen in de voorlopige conclusie.

Opgave 5. In deze opgave is L de taal met één 1-plaatsig functiesymbool f, en M is de L-structuur $[0, \pi)$ met $f^M = \sin$.

a) (2) Geef een L-formule die het getal 0 in M definieert (d.w.z. een formule $\phi(x)$ zodat voor alle $a \in M$ geldt: $M \models \phi[a] \;\Leftrightarrow\; a = 0$)

b) (3) Geef een L-formule die in M het getal $\frac{1}{2}\pi$ definieert

c) (3) Geef een L-formule die in M het getal 1 definieert

d) (2) Geef een L-formule die in M de deelverzameling $(1, \pi)$ definieert (d.w.z. een $\phi(x)$ zodat voor alle $a \in M$: $M \models \phi[a] \;\Leftrightarrow\; 1 < a < \pi$)

Uitwerking: a) $f(x) = x$

b) $\neg(f(x) = x) \wedge \forall y(f(x) = f(y) \rightarrow x = y)$

c) $\neg(f(x) = x) \wedge \exists y(f(y) = x \wedge \forall z(f(z) = x \rightarrow z = y))$

d) $\neg\exists y(f(y) = x)$