Tentamen Grondslagen van de Wiskunde A met beknopte uitwerking

8 maart 2017, 09:30–12:30

DIT TENTAMEN BEVAT 5 OPGAVEN; ZIE OOK DE OMMEZIJDE.
Alle opgaven tellen even zwaar (10 punten); je cijfer is het totaal aantal punten, gedeeld door 5. Als een opgave uit meerdere deeltjes bestaat, staat bij elk deeltje hoeveel van de 10 punten dat deeltje waard is.
Advies: maak eerst die opgaven, die je kunt; en ga dan nadenken over de rest. Succes!

Opgave 1. Geef voor elke van onderstaande verzamelingen aan, of hij eindig, aftelbaar oneindig of overaftelbaar is. Motiveer je antwoord kort.

a) (3) $\{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \,|\, \text{voor alle } n \text{ is } f(n) = f(n+1) + f(n+2)\}$

b) (4) $\{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \,|\, \text{voor alle } n \text{ is } f(n)^2 - 3f(n) + 2 = 0\}$

c) (3) $\{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \,|\, \text{voor alle } n \text{ is } f(n) \geq f(n+1)\}$

Uitwerking: a) Er is precies één functie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ die aan de eis voldoet, namelijk de functie die constant 0 is (als $f(n) \neq 0$ dan is $f(n+1) < f(n)$ dus dit kan niet voor alle n waar zijn; als n_0 de kleinste n is met $f(n) = 0$ en $n_0 = k + 1$ krijgen we ook een tegenspraak, want als $f(n) = 0$ dan moet ook $f(n+1) = 0$). De gegeven verzameling is dus *eindig*.
b) Dit is de verzameling $\{1, 2\}^{\mathbb{N}}$, en deze is *overaftelbaar*.
c) Elke functie die aan de eis voldoet, moet uiteindelijk constant zijn; de gegeven verzameling staat in bijectieve correspondentie met de verzameling van eindige, monotoon niet-stijgende rijtjes natuurlijke getallen $a_1 \geq \cdots \geq a_n$ die voldoen aan: als $n > 1$ dan is $a_{n-1} > a_n$. Deze verzameling is *aftelbaar oneindig*.

Opgave 2. Met $[0, 2)$ geven we, zoals gebruikelijk, het half-open interval $\{x \in \mathbb{R} \,|\, 0 \leq x < 2\}$ aan.

In deze opgave beschouwen we de groep $[0,2)$ met optelling "modulo 2", d.w.z. voor $x, y \in [0,2)$ zetten we:

$$x \oplus y = \begin{cases} x+y & \text{als } x+y<2 \\ x+y-2 & \text{als } x+y \geq 2 \end{cases}$$

a) (5) Bewijs met behulp van het lemma van Zorn dat er een deelgroep G van $[0,2)$ is die maximaal is m.b.t. de eigenschap, dat $1 \notin G$.

b) (5) Laat G als in deeltje a). Laat zien dat voor elke $x \in [0,2)$ geldt: als $x \notin G$, dan is er een *even* getal n zodat

$$\underbrace{x \oplus \cdots \oplus x}_{n \text{ keer}} \in G$$

Uitwerking: a) Beschouw de poset P van alle deelgroepen van $[0,2)$ die het getal 1 niet bevatten; deze is niet-leeg want $\{0\}$ is een element van P. De verificatie dat P aan de voorwaarde van het lemma van Zorn voldoet is rechttoe-rechtaan. Dus P heeft een maximaal element.
b) Stel G maximaal zodat $1 \notin G$; stel $x \in [0,2) - G$. Beschouw de deelgroep van $[0,2)$ voortgebracht door x en G; deze is groter dan G, dus moet hij, wegens de maximaliteit van G, het getal 1 bevatten. Dat betekent dat voor zeker element $g \in G$ en natuurlijk getal $n > 0$, we hebben

$$g \oplus (\underbrace{x \oplus \cdots \oplus x}_{n \text{ keer}}) = 1$$

Er volgt, omdat $1 \oplus 1 = 0$ in $[0,2)$, dat $\underbrace{x \oplus \cdots \oplus x}_{2n \text{ keer}} \in G$.

Opgave 3. Beschouw de poset $(P, \leq)$ van alle oneindige deelverzamelingen van $\mathbb{N}$: de ordening op P is inclusie als deelverzameling.
Laat $(W, \leq)$ een welordening zijn en $f : P \to W$ een ordebewarende functie (dus: als $A \subseteq B$ dan $f(A) \leq f(B)$).
Bewijs, dat f niet injectief kan zijn.

Uitwerking: als f ordebewarend èn injectief is, dan volgt dat f de stricte ongelijkheid behoudt: als $x < y$ dan $f(x) < f(y)$. Nu hebben we in P veel oneindige, strict dalende rijtjes: als $A = \{a_0, a_1, \ldots\}$ een oneindige deelverzameling van $\mathbb{N}$ is, dus een element van P, en voor $n \in \mathbb{N}$ zetten we $A_n = \{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\}$, dan is duidelijk dat $A_n \in P$ voor alle n, en dat $A_0 \supsetneq A_1 \supsetneq A_2 \cdots$.

Omdat f de stricte ongelijheid behoudt, volgt dat $f(A_0) > f(A_1) > f(A_2) > \cdots$, m.a.w. we hebben een strict dalend rijtje in W. Maar dat kan niet in een welordening.

Opgave 4. Laat L de taal zijn met één 2-plaatsig functiesymbool f. Geef voor elk van de onderstaande L-structuren een L-zin, die waar is in die structuur maar onwaar in de andere drie structuren. Een beetje uitleg wordt op prijs gesteld.

a) (2) $\mathbb{R} - \{0\}$ met de gewone vermenigvuldiging.

b) (3) $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| > 1\}$ met de gewone vermenigvuldiging.

c) (2) $\{x \in \mathbb{C} \mid |x| > 1\}$ met de gewone vermenigvuldiging.

d) (3) De verzameling 2×2-matrices met reële coëfficiënten, waarvan de determinant absolute waarde > 1 heeft, met matrixvermenigvuldiging.

Uitwerking: er waren hier natuurlijk veel oplossingen mogelijk, maar de simpelste lijkt:
a) Laat ϕ_a zeggen dat er een eenheidselement voor de vermenigvuldiging is:

$$\exists x \forall y (f(x,y) = y)$$

c) Laat ϕ_c zeggen dat elk element een kwadraat is:

$$\forall x \exists y (f(y,y) = x)$$

d) Laat ϕ_d zeggen dat de vermenigvuldiging niet commutatief is:

$$\exists x \exists y \neg (f(x,y) = f(y,x))$$

b) Tenslotte, laat ϕ_b gelijk zijn aan $\neg\phi_a \wedge \neg\phi_c \wedge \neg\phi_d$.

Opgave 5. Laat $(P, \leq)$ een poset zijn. Noem elementen $x, x' \in P$ *verbonden* als er een $n \geq 2$ is en er rijtjes $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_{n-1}$ van elementen van P bestaan zodat $x = x_1$, $x' = x_n$, en voor alle i met $1 \leq i < n$ geldt: $x_i \leq y_i$ en $x_{i+1} \leq y_i$.

a) (4) Laat zien dat "verbondenheid" een equivalentierelatie op P is.

b) (6) Noem P *hecht* als elk tweetal elementen van P verbonden is. Bewijs, dat er geen theorie in de taal $L_{\text{pos}} = \{\leq\}$ van posets is, waarvan de modellen precies de hechte posets zijn. Hint: gebruik de Compactheidsstelling.

Uitwerking: a) Dit was eenvoudig.
b) Er is, voor elke n, een L_{pos}-formule $\phi_n(x, y)$ die uitdrukt, dat x en y niet verbonden zijn door een rijtje van lengte n.

Stel nu, dat er een L_{pos}-theorie T_{hecht} van hechte posets als in b) bestaat. Laat $L_{\text{pos}}(c, d)$ de uitbreiding van de taal L_{pos} zijn met twee nieuwe constanten c en d. Zij T' de $L_{\text{pos}}(c, d)$-theorie

$$T_{\text{hecht}} \cup \{\phi_n(c, d) \mid n \in \mathbb{N}\}$$

In elk model M van T' zijn c^M en d^M verbonden; maar ze zijn niet verbonden door een eindig rijtje. Dit kan duidelijk niet, dus T' is inconsistent. Er volgt met de Compactheidsstelling, dat er een eindige deeltheorie T'' van T' is, die inconsistent is; zo'n T'' is een deeltheorie van

$$T_{\text{hecht}} \cup \{\phi_n(c, d) \mid n \leq k\}$$

voor zekere $k \in \mathbb{N}$. Echter, de laatste theorie is consistent, zoals eenvoudig is in te zien.