# Tentamen Grondslagen van de Wiskunde B

met beknopte uitwerking

Dit tentamen bevat 5 opgaven; zie ook de ommezijde.

30 januari 2018, 17:00–20:00

**Opgave 1**. Laten $L$ en $L'$ twee talen zijn met $L \subseteq L'$; zij $T$ een $L$-theorie en $T'$ een $L'$-theorie met $T \subseteq T'$. De theorie $T'$ heet *conservatief over* $T$ als voor elke $L$-zin $\phi$ geldt: als $T' \models \phi$ dan ook $T \models \phi$.

a) (5) Zij $P$ de poset van $L'$-theorieën $T'$ waarvoor $T \subseteq T'$ en $T'$ conservatief is over $T$; $P$ is geordend door $\subseteq$. Laat zien dat $P$ voldoet aan de voorwaarden van het lemma van Zorn. [Hint: gebruik de Compactheidsstelling.]

b) (5) Volgens het lemma van Zorn heeft $P$ een maximaal element $U$. Laat zien dat voor elke $L'$-zin $\psi \notin U$ er een $L'$-zin $\chi \in U$ en een $L$-zin $\phi$ zijn, waarvoor geldt: $\psi \models \chi \to \phi$ en $T \not\models \phi$. [Hint: gebruik andermaal de Compactheidsstelling.]

**Uitwerking**. a): We moeten laten zien dat elke keten in $P$ een bovengrens heeft. Stel dus dat $\{T_i \,|\, i \in I\}$ een keten in $P$ is; beschouw $\mathcal{T} = \bigcup_{i\in I} T_i$. We laten zien dat $\mathcal{T} \in P$, oftewel dat $\mathcal{T}$ conservatief is over $T$. Laat $\phi$ een $L$-zin zijn en stel $\mathcal{T} \models \phi$. Volgens de Compactheidsstelling is er nu een eindige deeltheorie $\mathcal{T}'$ van $\mathcal{T}$ zodat $\mathcal{T}' \models \phi$. Omdat $\{T_i \,|\, i \in I\}$ een keten is, volgt dat $\mathcal{T}' \subseteq T_i$ voor zekere $i$. Dus $T_i \models \phi$ en omdat $T_i$ conservatief is over $T$, volgt $T \models \phi$. Dit bewijst dat $\mathcal{T}$ conservatief is over $T$, dus een element van $P$.

b): Laat $U$ een maximaal element van $P$ zijn en $\psi$ een $L'$-zin die geen element is van $U$. Dan volgt uit de maximaliteit van $U$ dat $U \cup \{\psi\}$ niet conservatief over $T$ is: er is een $L$-zin $\phi$ waarvoor geldt dat $T \not\models \phi$ en $U \cup \{\psi\} \models \phi$. Oftewel: $U \models \psi \to \phi$. Weer passen we de Compactheidsstelling toe: er is een eindige deelverzameling $\{\chi_1, \ldots, \chi_n\}$ van $U$ is zodat $\{\chi_1, \ldots, \chi_n\} \models \psi \to \phi$. Laat $\chi$ de conjunctie $\chi_1 \wedge \cdots \wedge \chi_n$ zijn. We zien: $\chi \models \psi \to \phi$ en dit is equivalent met $\psi \models \chi \to \phi$. Tenslotte: $\chi \in U$, dit volgt uit de maximaliteit van $U$ en de aanname dat $\{\chi_1, \ldots, \chi_n\} \subseteq U$.

**Opgave 2**. In deze opgave is steeds gegeven: een taal $L$, een $L$-structuur $M$ en een substructuur $N$ van $M$. Bepaal steeds of $N$ een elementaire substructuur is van $M$. Motiveer je antwoord kort.

a) (3) $L = \{\leq\}$, $M = \mathbb{R}$ (met gewone ordening), $N = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ (met gewone ordening).

b) (3) $L = \{\cdot\}$ ($\cdot$ is een 2-plaatsig functiesymbool), $M = \mathbb{R}$ (met gewone vermenigvuldiging), $N = \mathbb{Q}$ (met gewone vermenigvuldiging).

c) (4) $L = \{S\}$ ($S$ is een 1-plaatsig functiesymbool), en

$$\begin{aligned} M &= \{(i,n) \,|\, i \in \{0,1\},\, n \in \mathbb{N}\} \quad \text{met } S^M(i,n) = (i,n+1) \\ N &= \{(0,n) \,|\, n \in \mathbb{N}\} \quad \text{met } S^N(0,n) = (0,n+1) \end{aligned}$$

**Uitwerking**. a): zowel $M$ als $N$ zijn modellen van de theorie $T_d$ van dichte lineaire ordeningen zonder eindpunten. Deze theorie heeft kwantoreliminatie, dus $N$ is een elementaire substructuur van $M$.
b): hier hebben we het aloude voorbeeld van het getal 2, dat geen kwadraat is in $\mathbb{Q}$ maar wel in $\mathbb{R}$: $\exists x(x{\cdot}x = 2)$ is een $L_N$-zin die waar is in $M$ maar niet in $N$.
c): In $N$ is er precies één element dat niet in het bereik van de functie $S$ zit; in $M$ zijn er twee zulke elementen. De $L_N$-zin $\forall y(y = (0,0) \vee \exists x(S(x) = y))$ is dus waar in $N$ maar niet in $M$.

**Opgave 3**. Laat $L$ de taal $\{0, S\}$ waar 0 een constante is en $S$ een 1-plaatsig functiesymbool. Zij $T$ de $L$-theorie met axioma's:

$$\begin{array}{ll} \forall x \neg(S(x) = 0) & \forall x \neg(S^n(x) = x) \;\; (n > 0) \\ \forall x \forall y(S(x) = S(y) \to x = y) & \forall x(\neg(x = 0) \to \exists y(S(y) = x)) \end{array}$$

Hier is $S^n(x)$ een afkorting voor $\underbrace{S(S(\cdots S}_{n \text{ keer}}(x))\cdots)$.

a) (3) Laat zien dat $T$ niet $\omega$-kategorisch is.

b) (4) Bewijs dat $T$ wèl $2^\omega$-kategorisch is.

c) (3) Bewijs dat $T$ volledig is.

**Uitwerking**. a) Beschouw de modellen $N = \mathbb{N}$ met $S^N(x) = x + 1$ en

$$M = \mathbb{N} + \mathbb{Z} = \{(0,n) \,|\, n \in \mathbb{N}\} \cup \{(1,x) \,|\, x \in \mathbb{Z}\}$$

met $S^M((0,n)) = (0,n+1)$ en $S^M((1,x) = (1,x+1))$. Deze zijn beide aftelbaar en niet isomorf, want bijvoorbeeld $(1,0) \in M$ is niet te verkrijgen door een eindig aantal keren $S^M$ op $0^M$ toe te passen. In $N$ bestaat zo'n element niet.

b) Dit was misschien de moeilijkste opgave; deze vereist een kleine analyse van modellen van $T$. Stel $M$ is model van $T$. We hebben de deelverzameling

$\{0^M, S^M(0^M), S^M(S^M(0^M)), \ldots\}$: een kopie van $\mathbb{N}$. Stel dat $M$ nog een element $x$ heeft dat hierbuiten ligt. Dan ligt ook $(S^M)^n(x)$ er buiten, voor alle $n \in \mathbb{N}$; en bovendien is er voor elke $n \in \mathbb{N}$ een $y \in M$ zo dat $(S^M)^n(y) = x$. En deze $y$ is uniek. We krijgen rond $x$ dus een kopie van $\mathbb{Z}$. Het model $M$ bestaat dus uit: een kopie van $\mathbb{N}$ en een aantal kopieën van $\mathbb{Z}$. Als $|M| = 2^\omega$ dan zijn er $2^\omega$ veel van zulke kopieën van $\mathbb{Z}$. Voor twee modellen $M_1$ en $M_2$ van kardinaliteit $2^\omega$ is er dus een bijectie te maken tussen de kopieën van $\mathbb{Z}$ in $M_1$, en die in $M_2$. Uit zo'n bijectie haal je dan gemakkelijk een isomorfisme tussen $M_1$ en $M_2$.

c): in elk model $M$ van $T$ is de functie $S^M$ injectief maar niet surjectief: dus $M$ is oneindig en $T$ heeft alleen oneindige modellen. Verder is $T$ $2^\omega$-kategorisch en de taal $L$ is aftelbaar, zodat de bewering een directe toepassing is van de Łos-Vaught Test.

**Opgave 4**. Geef voor de volgende uitspraken òf een bewijs (door een bewijsboom te construeren), òf een tegenvoorbeeld (in een model).

a) (3) $\forall x \forall y(f(x) = f(y) \to x = y) \vdash \forall x \exists y(f(y) = x)$.

b) (4) $\phi \wedge \exists x\psi(x) \vdash \exists x(\phi \wedge \psi(x))$ (hierbij wordt verondersteld dat de variabele $x$ niet in $\phi$ voorkomt).

c) (3) $\exists x\phi(x) \wedge \exists x\psi(x) \vdash \exists x(\phi(x) \wedge \psi(x))$.

**Uitwerking**. a): het model $\mathbb{N}$ met $f$ geïnterpreteerd door de functie $x \mapsto x + 1$, is een tegenvoorbeeld.
b):

$$\dfrac{\dfrac{\phi \wedge \exists x\psi(x)^1}{\exists x\psi(x)}\wedge\mathrm{E} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\phi \wedge \exists x\psi(x)^1}{\phi}\wedge\mathrm{E} \qquad \psi(u)^2}{\phi \wedge \psi(u)}\wedge\mathrm{I}}{\exists x(\phi \wedge \psi(x))}\exists\mathrm{I}}{\exists x(\phi \wedge \psi(x))}\exists\mathrm{E},2$$

c): neem een model $M$ met 2 elementen 0 en 1, en 1-plaatsige relatiesymbolen $R$ en $S$ zodat $R^M = \{0\}$ en $S^M = \{1\}$. We hebben $\exists x R(x) \wedge \exists x S(x)$ maar niet $\exists x(R(x) \wedge S(x))$.

**Opgave 5**. Laat $x$ een verzameling zijn en $\omega$ het kleinste oneindige ordinaalgetal. We definiëren met recursie op $\omega$ de volgende functie $f$:

$$f(0) = x \quad f(n+1) = \bigcup f(n)$$

a) (4) Laat zien dat de collectie $\{y \mid \exists n \in \omega(y \in f(n))\}$ een verzameling is. We noteren deze als $T(x)$.

b) (3) Laat zien dat $T(x)$ transitief is.

c) (3) Stel, dat $y$ een transitieve verzameling is met $x \subseteq y$. Bewijs dat $T(x) \subseteq y$.

**Uitwerking**. a): we hebben een operatie $f$, gedefinieerd door recursie op de welordening $\omega$. Met het Replacement-axioma volgt dat $X = \{f(n) \mid n \in \omega\}$ een verzameling is; vervolgens volgt met het verenigingsaxioma dat $\bigcup X$ een verzameling is. Dit is de gevraagde verzameling $T(x)$.

b): stel $y \in T(x)$, $z \in y$. Dan is $y \in f(n)$ voor zekere $n \in \omega$, en dus is $z \in f(n+1)$ voor die $n$. We zien dat $z \in T(x)$, dus $T(x)$ is transitief.

c): we bewijzen met inductie op $n \in \omega$ dat $f(n) \subseteq y$. Voor $n = 0$ is dit het gegeven $x \subseteq y$. Stel $f(n) \subseteq y$; nu volgt dat $f(n+1) \subseteq y$ uit de transitiviteit van $y$. Dus inderdaad is $f(n) \subseteq y$ voor alle $n \in \omega$; er volgt dat $\bigcup\{f(n) \mid n \in \omega\} \subseteq y$, oftewel $T(x) \subseteq y$.