Tentamen Grondslagen van de Wiskunde B

DIT TENTAMEN BEVAT 5 OPGAVEN; ZIE OOK DE OMMEZIJDE.

28 januari 2019, 08:30–11:30

Alle opgaven tellen even zwaar (10 punten); je cijfer is het totaal aantal punten, gedeeld door 5. Als een opgave uit meerdere deeltjes bestaat, staat bij elk deeltje hoeveel van de 10 punten dat deeltje waard is.
Advies: maak eerst die opgaven, die je kunt; en ga dan nadenken over de rest. Succes!

Opgave 1. Gegeven is een aftelbare taal L en een L-theorie T. We nemen aan dat T zowel een eindig als een oneindig model heeft.

a) (4) Laat zien dat T niet volledig is.

b) (6) Neem nu aan dat alle aftelbaar oneindige modellen van T isomorf zijn. Geef een consistents uitbreiding T' van T, die volledig is (en bewijs die volledigheid).

Opgave 2. Laat weer L een aftelbare taal zijn; stel dat T een L-theorie is waarvan alle oneindige modellen isomorf zijn.

a) (5) Bewijs dat T alleen eindige modellen heeft.

b) (5) Bewijs dat er een getal $n \in \mathbb{N}$ bestaat zodat elk model van T kardinaliteit hoogstens n heeft. [Hint: gebruik de Compactheidsstelling.]

Opgave 3. Bewijs (door middel van een bewijsboom) of weerleg (door een tegenmodel te geven) de volgende uitspraken (steeds is R een 2-plaatsig relatiesymbool):

a) (3) $\vdash \forall x \exists y(\neg(x = y) \to R(x, y))$

b) (4) $\forall u \exists v R(u, v) \vdash \forall v \exists u R(u, v)$

c) (3) $\forall u \neg R(u, u) \vdash \exists v \forall u \neg R(u, v)$

Opgave 4. Stel dat L een taal is, T een L-theorie en ϕ een L-zin waarvoor geldt: $T \nvdash \phi$. Bewijs dat er een volledige L-theorie $T' \supseteq T$ is met de eigenschappen:

i) T' is formeel consistent.

ii) $T' \vdash \neg\phi$.

[Hint: gebruik het Lemma van Zorn.]

Opgave 5. In deze opgave werken we met de axioma's van ZF. Ik herinner eraan, dat een verzameling X *transitief* is als voor alle $x \in X$ en $y \in x$ geldt $y \in X$. Stel nu dat α een verzameling is met de eigenschappen:

i) α is transitief.

ii) Elk element van α is transitief.

a) (5) Bewijs, dat elk element van α een ordinaalgetal is. [Hint: pas het Regulariteitsaxioma toe op de verzameling $\{x \in \alpha \mid x \text{ is geen ordinaalgetal}\}$.]

b) (5) Bewijs dat α een ordinaalgetal is.