Tentamen Grondslagen van de Wiskunde B

MET BEKNOPTE UITWERKINGEN

28 januari 2019, 08:30–11:30

Opgave 1. Gegeven is een aftelbare taal L en een L-theorie T. We nemen aan dat T zowel een eindig als een oneindig model heeft.

a) (4) Laat zien dat T niet volledig is.

b) (6) Neem nu aan dat alle aftelbaar oneindige modellen van T isomorf zijn. Geef een consistents uitbreiding T' van T, die volledig is (en bewijs die volledigheid).

Uitwerking: a) Zij ϕ_n de zin in de lege taal, die zegt dat er hooguit n elementen zijn (we zullen ϕ_n nog vaker tegenkomen, dus we houden deze notatie aan). Als T een eindig model M en een oneindig model N heeft, dan is de zin $\phi_{|M|}$ waar in M en onwaar in N, dus $T \not\models \phi_{|M|}$ en $T \not\models \neg\phi_{|M|}$. Dus T is niet volledig.

b) Zij T' de theorie $T \cup \{\neg\phi_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. T' is consistent, want elk oneindig model van T is een model van T'. Verder zijn elke twee aftelbare modellen van T' isomorf, omdat het ook modellen van T zijn. Voorts heeft T' alleen maar oneindige modellen. We concluderen met de Łos-Vaught test, dat T' volledig is.

Opgave 2. Laat weer L een aftelbare taal zijn; stel dat T een L-theorie is waarvan alle oneindige modellen isomorf zijn.

a) (5) Bewijs dat T alleen eindige modellen heeft.

b) (5) Bewijs dat er een getal $n \in \mathbb{N}$ bestaat zodat elk model van T kardinaliteit hoogstens n heeft. [Hint: gebruik de Compactheidsstelling.]

Uitwerking: a) Stel T heeft een oneindig model M. Dan heeft T ook een model van kardinaliteit minstens $2^{|M|}$, met de opwaartse Löwenheim-Skolemstelling. Noemen we dit laatste model N, dan kunnen M en N onmogelijk isomorf zijn omdat ze verschillende kardinaliteit hebben. Deze tegenspraak bewijst dat T geen oneindige modellen heeft.

b) Omdat T geen oneindige modellen heeft is the theorie $T \cup \{\neg\phi_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ inconsistent. Met de Compactheidsstelling volgt dat deze theorie al een eindige inconsistente deeltheorie heeft. Dus voor zekere $k \in \mathbb{N}$ is de theorie $T \cup \{\neg\phi_n \mid n \leq k\}$ inconsistent. Dit betekent dat elk model van T kardinaliteit hoogstens k heeft.

Opgave 3. Bewijs (door middel van een bewijsboom) of weerleg (door een tegenmodel te geven) de volgende uitspraken (steeds is R een 2-plaatsig relatiesymbool):

a) (3) $\vdash \forall x \exists y(\neg(x = y) \to R(x, y))$

b) (4) $\forall u \exists v R(u, v) \vdash \forall v \exists u R(u, v)$

c) (3) $\forall u \neg R(u, u) \vdash \exists v \forall u \neg R(u, v)$

Uitwerking: a)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x(x = x)}{x = x}\,\forall E \qquad \neg(x = x)^{1\dagger}}{\perp}\,\neg E}{R(x, x)}\,\perp E}{\neg(x = x) \to R(x, x)}\,\to I, 1}{\exists y(\neg(x = y) \to R(x, y))}\,\exists I}{\forall x \exists y(\neg(x = y) \to R(x, y))}\,\forall I}{}$$

b) Deze bewering is onwaar: neem bijvoorbeeld $\mathbb{N}$, met de stricte ordening $<$ voor R. Er geldt $\forall u \exists v R(u, v)$ omdat $\mathbb{N}$ geen grootste element heeft; maar $\forall v \exists u R(u, v)$ geldt niet, want $\mathbb{N}$ heeft wel een kleinste element.

c) Ook deze bewering is onwaar: neem weer $\mathbb{N}$ maar nu de relatie $>$ voor R. Er geldt $\forall u \neg R(u, u)$ want $m \leq m$ altijd. Maar $\exists v \forall u \neg R(u, v)$ is onwaar omdat (weer) $\mathbb{N}$ geen grootste element heeft.

Opgave 4. Stel dat L een taal is, T een L-theorie en ϕ een L-zin waarvoor geldt: $T \not\vdash \phi$. Bewijs dat er een volledige L-theorie $T' \supseteq T$ is met de eigenschappen:

i) T' is formeel consistent.

ii) $T' \vdash \neg\phi$.

[Hint: gebruik het Lemma van Zorn.]

Uitwerking Laat P de poset zijn van theorieën U met de eigenschap dat $T \subseteq U$ en $U \not\vdash \phi$; P is geordend door inclusie. Dan is $P \neq \emptyset$ want $T \in P$. Stel dat $(T_i)_{i \in I}$ een niet-lege keten in P is. Dan is $\bigcup_{i \in I} T_i$ een theorie die T bevat, en als $\bigcup_{i \in I} T_i \vdash \phi$ dan is er een eindige deeltheorie S van $\bigcup_{i \in I} T_i$ zodat $S \vdash \phi$, met andere woorden er is (vanwege de keteneigenschap) een $i \in I$ zodat $T_i \vdash \phi$, in strijd met onze aanname. Dus $\bigcup_{i \in I} T_i$ is een bovengrens in P voor de keten.

Met het lemma van Zorn concluderen we dat P een maximaal element T' heeft. Uit het feit dat $T' \in P$, dus $T' \nvdash \phi$, concluderen we meteen dat T' formeel consistent is. Stel, dat T' niet volledig is; er is dan een L-zin ψ zodat $T' \nvdash \psi$ en $T' \nvdash \neg\psi$. We zien dat zowel $T' \cup \{\psi\}$ als $T' \cup \{\neg\psi\}$ uitbreidingen van T zijn, dus uit de maximaliteit van T' volgt dat zowel $T' \cup \{\psi\} \vdash \phi$ en $T' \cup \{\neg\psi\} \vdash \phi$. Maar dan volgt dat $T' \vdash \phi$ met $\vee$-eliminatie; immers $T' \vdash \psi \vee \neg\psi$. Dit is een tegenspraak, dus T' is volledig. Tenslotte: omdat $T' \nvdash \phi$, volgt uit de volledigheid van T' dat $T' \vdash \neg\phi$.

Opgave 5. In deze opgave werken we met de axioma's van ZF. Ik herinner eraan, dat een verzameling X *transitief* is als voor alle $x \in X$ en $y \in x$ geldt $y \in X$. Stel nu dat α een verzameling is met de eigenschappen:

i) α is transitief.

ii) Elk element van α is transitief.

a) (5) Bewijs, dat elk element van α een ordinaalgetal is. [Hint: pas het Regulariteitsaxioma toe op de verzameling $\{x \in \alpha \,|\, x \text{ is geen ordinaalgetal}\}$.]

b) (5) Bewijs dat α een ordinaalgetal is.

Uitwerking: a) Zij $u = \{x \in \alpha \,|\, x \text{ is geen ordinaalgetal}\}$, en veronderstel $u \neq \emptyset$. We leiden een tegenspraak af, waarmee a) dan bewezen is. Het Regulariteitsaxioma zegt dat u een element x heeft dat disjunct is met u. Nu is $x \in \alpha$, dus $x \subseteq \alpha$ vanwege de transitiviteit van α. Dus elk element van x is een ordinaalgetal. Nu is elke verzameling van ordinaalgetallen automatisch welgeordend m.b.t. $\in$, dus x ook. Tevens is x transitief vanwege ii). Dus x is een ordinaalgetal. Maar dit is een tegenspraak, want $x \in u$ was verondersteld.

b) De verzameling α is een verzameling van ordinaalgetallen, en dus (net als in a)) welgeordend m.b.t. $\in$. Tevens is α transitief; dus α is een ordinaalgetal.