Tentamen Grondslagen van de Wiskunde A met beknopte uitwerking

19 december 2018, 09:00–12:00

Opgave 1. We definiëren de volgende relatie op de machtsverzameling van $\mathbb{R}$: voor $A, B \subseteq \mathbb{R}$ geldt $A \sim B$ precies als $(A \cup B) - (A \cap B)$ aftelbaar is.

a) (4) Laat zien dat $\sim$ een equivalentierelatie is.

b) (3) Bepaal de kardinaliteit van elke equivalentieklasse.

c) (3) Bepaal de kardinaliteit van de verzameling equivalentieklassen.

Uitwerking a) Schrijf $A + B$ voor $(A \cup B) - (A \cap B)$. Duidelijk geldt $A + A = \emptyset$, dus aftelbaar; de relatie $\sim$ is reflexief. Symmetrie is triviaal. Tenslotte leiden we af dat $A + C \subseteq (A + B) \cup (B + C)$, dus de relatie $\sim$ is transitief.

b) Het handigste is om op te merken dat als $A + B = N$, dan $A + N = B$, dus de equivalentieklasse $[A]$ van A is in bijectief verband met de verzameling van alle aftelbare deelverzamelingen van $\mathbb{R}$. We zien (zoals ook door de opgave al gesuggereerd wordt) dat alle equivalentieklassen dezelfde kardinaliteit hebben. Zij N de verzameling aftelbare deelverzamelingen van $\mathbb{R}$. Voor elk reëel getal r is $\{r\} \in N$, dus $|\mathbb{R}| \leq |N|$; anderzijds is elke niet-lege aftelbare deelverzameling van $\mathbb{R}$ het beeld van een functie $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Er zijn $|\mathbb{R}^{\mathbb{N}}| = (2^\omega)^\omega = 2^{\omega \times \omega} = 2^\omega = |\mathbb{R}|$ veel van deze functies. Elke equivalentieklasse heeft dus kardinaliteit $|\mathbb{R}|$.

c) Laat A de verzameling equivalentieklassen zijn. We zien dat er een bijectie is tussen $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ en $A \times \mathbb{R}$, dus $2^{|\mathbb{R}|} = |\mathcal{P}(\mathbb{R})| = |A| \times |\mathbb{R}| = \max(|A|, |\mathbb{R}|)$. Omdat $|\mathbb{R}| < 2^{|\mathbb{R}|}$ volgens Cantor, moeten we hebben dat $|A| = 2^{|\mathbb{R}|}$.

Opgave 2. Voor functies $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ schrijven we $\min(f, g)$ voor de functie h waarvoor geldt:

$$h(x) = \min(f(x), g(x)) \quad (x \in \mathbb{R})$$

a) (5) Bewijs met behulp van het Lemma van Zorn dat er een deelverzameling $\mathcal{A}$ van $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ is die maximaal is met betrekking tot de eigenschap: als $f, g \in \mathcal{A}$ en $f \neq g$, dan $\min(f, g) \notin \mathcal{A}$.

b) (5) Laat $\mathcal{A}$ zijn als in deeltje a). Laat zien dat voor alle $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ het volgende geldt: hetzij $f \in \mathcal{A}$, hetzij er is een $g \in \mathcal{A}$ zodat $f(x) \leq g(x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$, hetzij er is een $g \in \mathcal{A}$ zodat $g(x) \leq f(x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.

Uitwerking: a) Laat P de poset zijn van alle deelverzamelingen A van $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ die de eigenschap hebben dat wanneer $f, g \in A$ en $f \neq g$, dan $\min(f, g) \notin A$. De verzameling P is geordend door inclusie: $A \leq B$ als $A \subseteq B$. Voor elke functie f is de verzameling $\{f\}$ een element van P, dus $P \neq \emptyset$. Stel dat $(A_i)_{i \in I}$ een keten in P is; zij $A = \bigcup_{i \in I} A_i$. Als $f \neq g$ en $f, g, \min(f, g) \in A$ dan is er (vanwege de keteneigenschap) een i zodat $f \neq g$ en $f, g, \min(f, g) \in A_i$; maar dat kan niet, omdat de keten uit elementen van P bestaat. Dus $A \in P$ en elke keten heeft een bovengrens in P. Met het Lemma van Zorn concluderen we dat P een maximaal element $\mathcal{A}$ heeft.

b) Laat $\mathcal{A}$ als afgeleid in a), en beschouw een willekeurige functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Stel $f \notin \mathcal{A}$. Dan volgt uit de maximaliteit van $\mathcal{A}$ dat $\mathcal{A} \cup \{f\}$ geen element van P kan zijn: er zijn dus functies g, h zodat $g \neq h$ en $g, h, \min(g, h) \in \mathcal{A} \cup \{f\}$. We moeten dan hebben $f = g, f = h$ of $f = \min(g, h)$. Als $f = g$ dan is $h \in \mathcal{A}$ en hetzij $f(x) \leq h(x)$ voor alle x, hetzij $\min(f, h) \in \mathcal{A}$ en (uiteraard) $\min(f, h)(x) \leq f(x)$ voor alle x. Analoog voor de andere gevallen.

Opgave 3. Laat $L = \{\leq\}$ de taal van posets zijn. Voor een welordening M geven we met M_l de verzameling limietelementen van M aan; M_l is geordend als deelverzameling van M.

a) (3) Laat zien dat M_l een welordening is.

b) (4) Geef een L-formule $\phi_l(x)$ in één vrije variabele x, zodat voor elke welordening M en elke $a \in M$ geldt:

$$M \models \phi_l(a) \;\Leftrightarrow\; a \in M_l$$

c) (3) Geef een L-formule $\phi_{ll}(x)$ in één vrije variabele x, zodat voor elke welordening M en elke $a \in M$ geldt:

$$M \models \phi_{ll}(a) \;\Leftrightarrow\; a \in (M_l)_l$$

[Hint: hierbij mag je de formule ϕ_l uit deeltje b) gebruiken.]

Uitwerking: a) Elke deelverzameling van een welordening is, met de geërfde ordening, een welordening.

b) Bijvoorbeeld: $\forall y(\neg(x \leq y) \to \exists z(\neg(z \leq y) \wedge \neg(x \leq z)))$ (oftewel: voor elke $y < x$ is er een z met $y < z < x$).

c) Bijvoorbeeld: $\forall y(\phi_l(y) \wedge (\neg(x \leq y)) \to \exists z(\phi_l(z) \wedge \neg(z \leq y) \wedge \neg(x \leq z)))$ (Ga na dat in een welordening hieruit volgt dat x een limietelement is!)

Opgave 4. We beschouwen weer de taal $L = \{\leq\}$ van posets.

a) (5) Geef een L-formule $\phi(x)$ in één vrije variabele x die voldoet aan:

  i) Voor minstens één poset P geldt $P \models \exists x \phi(x)$.

  ii) Voor elke poset P en elke $p \in P$ geldt: als $P \models \phi(p)$, dan is de verzameling $\{y \in P \mid y \leq p\}$ oneindig.

b) (5) Geef een L-zin ψ die waar is in minstens één poset, en zodat elke poset die model is van ψ, oneindig is.

Uitwerking: a) Bijvoorbeeld $\forall w(w \leq x \to \exists v(v \leq w \wedge \neg(v = w)))$.

b) Bijvoorbeeld de zin $\exists x \phi(x)$, waar $\phi(x)$ de formule is die bij a) gevraagd was.

Opgave 5.Voor een verzameling A en een binaire relatie R op A definiëren we de *transitieve afsluiting* $\overline{R}$ van R als de kleinste transitieve relatie op A die R bevat. Dat wil zeggen, er geldt $(a, b) \in \overline{R}$ precies als er een $n > 0$ en $a_0, a_1, \ldots, a_n \in A$ bestaan zodat $a_0 = a$, $a_n = b$ en $(a_i, a_{i+1}) \in R$ voor $0 \leq i < n$.

Bekijk nu de taal L met twee constanten c en d, en een 2-plaatsig relatiesymbool R.

a) (4) Geef een L-theorie T zodat voor alle L-structuren M geldt: $M \models T$ dan en slechts dan als $(c^M, d^M) \notin \overline{R^M}$.

b) (6) Bewijs dat er geen L-zin φ bestaat zodat voor alle L-structuren M geldt dat $M \models \varphi$ dan en slechts dan als $(c^M, d^M) \notin \overline{R^M}$. [Hint: stel dat zo'n φ wel bestaat, en pas de Compactheidsstelling toe op de theorie $T \cup \{\neg\varphi\}$.]

Uitwerking: a) Voor elke $n \in \mathbb{N}$ maken we een L-zin ϕ_n als volgt: ϕ_0 is de zin $\neg R(c,d)$ en voor $n > 0$ is ϕ_n de zin

$$\forall x_0 \cdots \forall x_{n-1} \neg (R(c,x_0) \wedge \cdots \wedge R(x_{n-1},d))$$

die zegt dat er een "R-pad" van lengte $n+1$ is van c naar d. Zij T de theorie die bestaat uit alle zinnen ϕ_n. Als M een model is van T, dan is er in M geen eindig R-pad van c^M naar d^M, dus het paar (c,d) zit niet in de transitieve afsluiting van R (in M).

b) Stel zo'n zin φ bestond wel. Beschouw nu de theorie $T \cup \{\neg\varphi\}$. Deze zou inconsistent zijn; maar dan zou er , met de Compactheidsstelling, een natuurlijk getal k zijn zodat $\{\phi_n \,|\, n \leq k\} \models \varphi$ (oftewel: als er een eindig R-pad van c naar d is, dan is er zo'n R-pad van lengte hooguit k). Maar dit kan natuurlijk niet: voor iedere k is er de structuur $\{0,\ldots,k+1\}$ met $R = \{(i,i+1) \,|\, i \leq k\}$. Elk R-pad van 0 naar $k+1$ heeft lengte $> k$; toch geldt $(0,k+1) \in \overline{R}$.