Tentamen Grondslagen van de Wiskunde B

1 februari 2024. 13:30–16:30

DIT TENTAMEN BEVAT 5 OPGAVEN; ZIE OOK DE OMMEZIJDE.
Alle opgaven tellen even zwaar (10 punten); je cijfer is het totaal aantal punten, gedeeld door 5. Als een opgave uit meerdere deeltjes bestaat, staat bij elk deeltje hoeveel van de 10 punten dat deeltje waard is.
Advies: maak eerst die opgaven, die je kunt; en ga dan nadenken over de rest. Succes!

Opgave 1. Stel $L_1 \subset L_2$ zijn twee talen. Als M een L_2-structuur is kunnen we M ook beschouwen als L_1-structuur (door de interpretatie van de symbolen uit $L_2 - L_1$ te negeren); we schrijven dan $M{\restriction}L_1$.

Laat T_1 een L_1-theorie zijn en T_2 een L_2-theorie; we veronderstellen $T_1 \subseteq T_2$.

a) (5 pts) Stel dat elk model van T_1 een substructuur is van $M{\restriction}L_1$ voor een model M van T_2. Bewijs dat voor alle kwantorvrije L_1-zinnen ϕ geldt: als $T_2 \models \phi$ dan $T_1 \models \phi$.

b) (5 pts) Stel nu, dat elk model van T_1 een *elementaire* substructuur is van zo'n model $M{\restriction}L_1$. Bewijs dat T_2 conservatief is over T_1.

Opgave 2. Gegeven een taal L en een L-structuur M, heet een verzameling $\{\phi_i(x) \mid i \in I\}$ van L_M-formules in één vrije variabele x, een *1-type* van M als voor elke eindige deelverzameling I' van I er een $m \in M$ is zodat $M \models \phi_i(m)$ voor alle $i \in I'$.

a) (5 pts) Stel M' is een elementaire uitbreiding van M. Laat zien dat voor elke $n \in M'$ de verzameling L_M-formules

$$\{\phi(x) \mid M' \models \phi(n)\}$$

een 1-type van M is.

b) (5 pts) Omgekeerd, stel $\{\phi_i(x) \mid i \in I\}$ is een 1-type van M. Laat zien dat er een elementaire uitbreiding M' van M bestaat, en een $n \in M'$, zodat $M' \models \phi_i(n)$ voor alle $i \in I$.

Opgave 3. De theorie TDAG van *torsievrije deelbare abelse groepen* is geformuleerd in de taal $L = \{0, +, -\}$ waar 0 een constante is, + een tweeplaatsig functiesymbool en $-$ een éénplaatsig functiesymbool. De axioma's zijn:

$$\begin{array}{ll} \forall x\forall y(x+y=y+x) & \forall x(x+(-x)=0) \\ \forall x\forall y\forall z(x+(y+z)=(x+y)+z) & \forall x(x+0=x) \\ \forall x\exists y(\underbrace{y+\cdots+y}_{n>0}=x) & \forall x(\underbrace{x+\cdots+x}_{n>0}=0\rightarrow x=0) \end{array}$$

a) (3 pts) Laat zien dat elk model van TDAG een vectorruimte over $\mathbb{Q}$ is.

b) (4 pts) Laat zien dat TDAG κ-kategorisch is voor elke overaftelbare κ.

c) (3 pts) Beschouw $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ als modellen van TDAG, met de standaard optelling (en dus ook 0 en $-$). Bewijs dat in $\mathbb{R}$ en $\mathbb{Q}$ dezelfde L-zinnen waar zijn.

Opgave 4. Bewijs door middel van bewijsbomen:

a) (3 pts) $\varphi\rightarrow(\psi\wedge\chi)\vdash(\varphi\rightarrow\psi)\wedge(\varphi\rightarrow\chi)$

b) (4 pts) $\exists x\varphi(x)\vdash\exists x\exists y(\varphi(x)\wedge\varphi(y))$

c) (3 pts) $\exists x(\varphi(x)\rightarrow\psi)\vdash\forall x\varphi(x)\rightarrow\psi$

Opgave 5. De optelling van ordinaalgetallen is als volgt gedefinieerd:

$$\begin{aligned} \alpha+0 &= \alpha \\ \alpha+(\beta+1) &= (\alpha+\beta)+1 \\ \alpha+\lambda &= \textstyle\bigcup_{\beta<\lambda}(\alpha+\beta) \end{aligned}$$

waarbij de functie "+1" gegeven is door $\alpha+1=\alpha\cup\{\alpha\}$, en in de derde clausule wordt aangenomen dat λ een limiet-ordinaal is.

a) (5 pts) Laat zien dat als $\beta<\beta'$, dan $\alpha+\beta<\alpha+\beta'$ voor alle α.

b) (5 pts) Laat zien (door een tegenvoorbeeld) dat uit $\alpha<\alpha'$ *niet* volgt dat $\alpha+\beta<\alpha'+\beta$ voor alle β.