Herkansing Grondslagen van de Wiskunde

9 Maart 2001, 14.00–17.00

DIT TENTAMEN BEVAT 5 OPGAVEN; ZIE OOK DE OMMEZIJDE!

Advies: maak eerst die (deeltjes van) sommen, die je kunt; en ga daarna nadenken over de rest! Succes!

Opgave 1. Wij beschouwen de verzameling $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ van alle functies $f : \mathbb{N} \to \{0,1\}$. Definieer hierop een relatie $\sim$ door te stipuleren: $f \sim g$ precies dan als er een $k \in \mathbb{N}$ is zodat voor alle $n > k$, $f(n) = g(n)$ geldt.

a) Bewijs, dat $\sim$ een equivalentierelatie is.

b) Laat zien dat voor elke $f : \mathbb{N} \to \{0,1\}$, de equivalentieklasse van f onder $\sim$ een aftelbare verzameling is.

c) Leid uit b) af, dat de verzameling $(\{0,1\}^{\mathbb{N}})/\sim$ van equivalentieklassen modulo $\sim$, niet aftelbaar is.

Opgave 2. Zij $(L,<)$ een welordening. We herinneren aan de volgende terminologie: voor $x \in L$ is $x+1$ het kleinste element y van L (als dit bestaat) waarvoor geldt $x < y$. Elementen van de vorm $x+1$ heten *opvolgers*. Een element van L dat geen opvolger is, noemen we een *limietelement*.

a) Bewijs, dat er voor elke $x \in L$ een grootste element $y \in L$ is met de eigenschappen: $y \leq x$, en y is een limietelement.

b) Geef het onder a) bij $x \in L$ verkregen element y aan met $g(x)$. Laat zien, dat de verzameling
$$\{y \in L \mid g(x) \leq y \leq x\}$$
eindig is, voor elke $x \in L$.

Opgave 3. We beschouwen de taal $L = \{0,1;+,\cdot\}$ van commutatieve ringen (met 1).

Zij R een commutatieve ring. Een element $r \in R$ heet *irreducibel* als voor elke $s,t \in R$ geldt: als $r = st$ dan is hetzij s, hetzij t een eenheid in de ring R. Het element r heet *priem* als het ideaal
$$(r) = \{rs \mid s \in R\}$$
een priemideaal van R is.

Geef L-formules $\phi(x)$ en $\psi(x)$, beide met één vrije variabele x, zodat voor elke commutatieve ring R en elke $r \in R$ geldt:

$$\begin{aligned} R \models \phi(r) \quad &\Leftrightarrow \quad r \text{ is irreducibel} \\ R \models \psi(r) \quad &\Leftrightarrow \quad r \text{ is priem} \end{aligned}$$

Opgave 4. Een $\mathbb{N}$-set is een verzameling X samen met een functie $f : X \to X$. We beschouwen $\mathbb{N}$-sets (X, f) als structuren voor de taal $L = \{F\}$, waar F een 1-plaatsig functiesymbool is.

a) Een $\mathbb{N}$-set (X, f) heet *geworteld* als de functie f precies één dekpunt heeft; d.w.z. als er precies één $x \in X$ is zodat $x = f(x)$.

   Geef een L-zin ϕ zodat voor elke (X, f) geldt:

$$(X, f) \models \phi \;\Leftrightarrow\; (X, f) \text{ is geworteld}$$

b) Een $\mathbb{N}$-set (X, f) heet een *boom* als (X, f) geworteld is èn er voor elke $x \in X$ een geheel getal $n \geq 0$ is, zodat

$$f^n(x) = f^{n+1}(x)$$

   Hier geeft $f^n(x)$ het resultaat aan van het n keer toepassen van f op x.

   Bewijs, dat er geen L-theorie T is zodat voor alle $\mathbb{N}$-sets (X, f) geldt: (X, f) is een model van T, precies dan als (X, f) een boom is.

Opgave 5. Geef bewijsbomen voor de volgende beweringen:

a) $(\phi \vee \psi) \to \chi \vdash (\phi \to \chi) \wedge (\psi \to \chi)$

b) $\neg\neg\phi \vdash \phi$

c) $\forall x(R(x) \to \phi) \vdash (\exists x R(x)) \to \phi$
   waar de variabele x niet voorkomt in ϕ.