Mathematisch Instituut, Faculteit Wiskunde en Informatica, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de $\mathcal{TBC}$ van A−Eskwadraat.
Het college WISB324 werd in 2004/2005 gegeven door J. Stienstra.

Uitwerking[1] Voorstellingen van eindige groepen (WISB324) 5 juli 2005

- Tijdens dit tentamen mag het boek “Representations and characters of groups” van James en Liebeck worden geraadpleegd.
- Geef niet alleen antwoorden. Laat ook duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt.
- Indien je een onderdeel van een opgave niet of slechts ten dele kunt maken, ga dan toch door met het maken van de volgende onderdelen. Daarbij mag je het in de opgave geformuleerde resultaat van een onderdeel bij de *volgende* onderdelen van dezelfde opgave als gegeven gebruiken.

Opgave 1

In deze opgave is G een groep van orde 56. Verder is gegeven dat de commutator ondergroep (= derived subgroup) G' van G orde 8 heeft.

a) Laat zien dat G/G' een cyclische groep is van orde 7.

Antwoord:

De commutator ondergroep is normaal. Daarom is G/G' een groep. De orde van G/G' is $\frac{56}{8} = 7$. Omdat 7 een priemgetal is, is G/G' cyclisch.

b) Geef expliciet alle karakters van G/G'.

Antwoord:

Kies een voortbrenger a van G/G'. Dan is dus $G/G' = \{e, a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6\}$ ($a^7 = e$). Laat verder $\eta = e^{\frac{2\pi i}{7}}$. G/G' heeft 7 karakters $\chi_0, \ldots, \chi_6$, allemaal van graad 1.

χ_j wordt gegeven door
$$\chi_j(a^k) = \eta^{jk}$$

c) Bewijs dat G acht irreducibele voorstellingen heeft.

Antwoord:

Omdat G/G' orde 7 heeft, heeft G precies 7 voorstellingen van graad 1. Laat $d_0, d_1, \ldots$ de graden zijn van de irreducibele voorstellingen van G, met $d_0 = d_1 = \ldots = d_6 = 1$.

Dan is:
$$\sum_{J\geq 0} d_J^2 = 56, \quad \text{dus} \sum_{J\geq 7} d_J^2 = 49.$$

Verder weten we dat elke d_J een deler is van 56. Dus $d_J \in \{1, 2, 4, 8, 7, 14, 28, 56\}$.

Uit $\sum_{J\geq 7} d_J^2 = 49$ volgt dat er minstens één oneven $d_J > 1$ moet zijn. D.w.z. $\sum_{J\geq 7} d_J^2 = 49$ en minstens één $d_J > 7$.

Conclusie: G heeft 8 irreducibele voorstellingen; 7 van graad 1 en 1 van graad 7.

d) Geef alle conjugatieklassen van G.

Antwoord:

Zij $\alpha \in G$ een element dat afbeeldt op de voortbrenger a van G/G'.

[1] Deze uitwerkingen zijn met de grootste zorg gemaakt. In geval van fouten kan de $\mathcal{TBC}$ niet verantwoordelijk worden gesteld, maar wordt zij wel graag op de hoogte gesteld: tbc@A-Eskwadraat.nl

Bewering: de conjugatieklassen van G zijn

$$e, G'\backslash\{e\}, \alpha G', \alpha^2 G', \alpha^3 G', \alpha^4 G', \alpha^5 G' \text{ en } \alpha^6 G'$$

Bewijs: Volgens c) heeft G 8 conjugatieklassen. Omdat G/G' abels is, liggen $e, a \ldots a^6$ in verschillende conjugatieklassen van G/G'. Daarom, als $x \in \alpha^J G'$ en $y \in \alpha^k G'$ met $J \neq k$, dan zijn x en y niet geconjugeerd. Verder zijn e en $z \in G'\backslash\{e\}$ niet geconjugeerd.

Omdat er precies 8 conjugatieklassen zijn, moeten dat precies de verzamelingen in de bewering zijn.

e) Geef de volledige karaktertabel van G.

Antwoord:

Karaktertabel:

	e	$G'\backslash\{e\}$	$\alpha G'$	$\alpha^2 G'$	$\alpha^3 G'$	$\alpha^4 G'$	$\alpha^5 G'$	$\alpha^6 G'$
χ_0	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_1	1	1	η	η^2	η^3	η^4	η^5	η^6
χ_2	1	1	η^2	η^4	η^6	η	η^3	η^5
χ_3	1	1	η^3	η^6	η^2	η^5	η	η^4
χ_4	1	1	η^4	η	η^5	η^2	η^6	η^3
χ_5	1	1	η^5	η^3	η	η^6	η^4	η^2
χ_6	1	1	η^6	η^5	η^4	η^3	η^2	η
χ_7	7	-1	0	0	0	0	0	0

Toelichting: χ_0 t/m χ_6 zijn al in b) bepaald, want iedere voorstelling van G van graad 1, is de "lift" van een voorstelling van G/G'.

Om χ_7 te berekenen, gebruiken we de orthogonaliteitsrelaties voor de kolommen: alle kolommen na de eerste staan loodrecht op de eerste.

Verder gebruiken we $1 + \eta + \eta^2 + \eta^3 + \eta^4 + \eta^5 + \eta^6 = 0$.

f) Laat zien dat voor elk irreducibel karakter χ van G geldt:

$$\langle \chi \downarrow G' \,,\, \chi \downarrow G' \rangle_{G'} \;=\; \text{graad}\, \chi.$$

Hier is $\chi \downarrow G'$ de restrictie van χ tot de ondergroep G'.

Antwoord:

Uit de karaktertabel blijkt: als graad $\chi = 1$, dan is $\chi \downarrow G'$ het triviale karakter en dus

$$\langle \chi \downarrow G', \chi \downarrow G' \rangle_{G'} = 1 = \text{ graad } \chi$$

als graad $\chi = 7$ d.w.z. $\chi = \chi_7$, dan is

$$\langle \chi \downarrow G', \chi \downarrow G' \rangle_{G'} = \frac{1}{8}\left(1 \cdot 7^2 + 7 \cdot (-1)^2\right) = 7 = \text{ graad } \chi.$$

g) Voor een karakter ψ van G' is $\psi \uparrow G$ het geïnduceerde karakter van G.

Bereken

$$\langle (\chi_i \downarrow G') \uparrow G \,,\, \chi_j \rangle_G$$

voor ieder tweetal irreducibele karakters χ_i, χ_j van G.

Antwoord:

Frobeniusreciprociteit:

$$\langle (\chi_i \downarrow G') \uparrow G, \chi_j \rangle_G = \langle \chi_i \downarrow G', \chi_J \downarrow G' \rangle_{G'}$$

Hieruit, en uit de karaktertabel volgt:

$$\langle (\chi_i \downarrow G') \uparrow G, \chi_j \rangle_G = \begin{cases} 1 & \text{als} \quad 0 \leq i, j \leq 6 \\ 0 & \text{als} \quad 0 \leq i \leq 6, J = 7 \\ 7 & \text{als} \quad i = J = 7 \end{cases}$$

h) Ontbind voor elk irreducibel karakter χ van G het karakter $(\chi \downarrow G') \uparrow G$ in irreducibele karakters (van G).

Antwoord:

Volgens g): Als $0 \leq i \leq 6$; dan

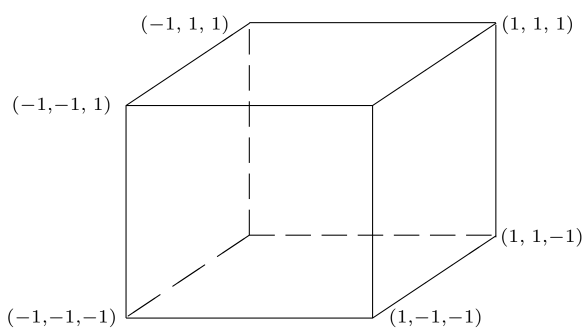
$$(\chi_i \downarrow G') \uparrow G = \chi_0 + \chi_1 + \chi_2 + \chi_3 + \chi_4 + \chi_5 + \chi_6$$

verder

$$(\chi_7 \downarrow G') \uparrow G = 7\chi_7.$$

Opgave 2

Neem in $\mathbb{R}^3$ de kubus $\mathbb{K}$ met hoekpunten $\{(\pm 1, \pm 1, \pm 1)\}$. Zij K de groep van alle draaiingen van $\mathbb{R}^3$ die $\mathbb{K}$ op $\mathbb{K}$ afbeelden. Deze groep heeft 24 elementen.



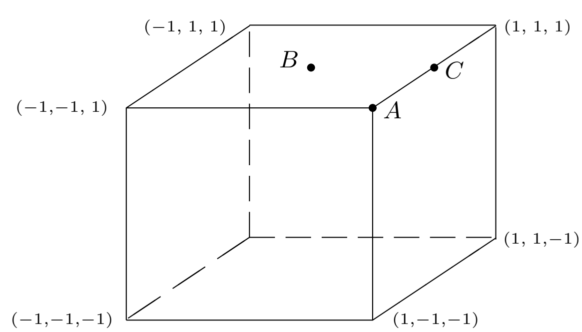
a) Laat zien dat K vijf conjugatieklassen heeft. Geef voor elke conjugatieklasse aan hoeveel elementen erin zitten. Geef in elke conjugatieklasse één element.

Antwoord:

De conjugatieklassen van K zijn:

$\rho_1 =$ $\{e\}$: het eenheidselement; heeft 1 element

$\rho_2 =$ {draaiingen van orde 3}; heeft 8 elementen. Het bevat bijvoorbeeld de draaiing om de lichaamsdiagonaal door A, die $(-1, -1, 1)$ naar $(1, 1, 1)$ draait.



$\rho_3 =$ {draaiingen van orde 4}; heeft 6 elementen. Het bevat bijvoorbeeld de draaiing om de coördinaatas door B die $(-1, -1, 1)$ naar $(-1, 1, 1)$ stuurt.

$\rho_4 =$ {draaiingen van orde 2 om coördinaatassen}; heeft 3 elementen. Het bevat bijvoorbeeld de draaiing om de coördinaatas door B die $(-1, -1, 1)$ naar $(1, 1, 1)$ stuurt.

$\rho_5 =$ {draaiingen van orde 2 om assen door middens van twee overstaande zijden}; heeft 6 elementen. Het bevat bijvoorbeeld de as door C.

b) De bovenstaande definitie van K geeft automatisch een 3-dimensionale voorstelling van K. Zij χ_3 het karakter van deze voorstelling.
Bereken $\chi_3(g)$ voor elke $g \in K$.

Antwoord:

Uit het plaatje kan men gemakkelijk de matrix t.o.v. de standaardbasis van $\mathbb{R}^3$ aflezen voor elke draaiing in K. Het karakter is het spoor van zo'n matrix.

Zo vinden we

$$\chi_g = \begin{cases} & & & K \cong S_4 \\ 3 & \text{als} & g \in \rho_1 & \{e\} \\ 0 & & g \in \rho_2 & (123) \\ 1 & & g \in \rho_3 & (1234) \\ -1 & & g \in \rho_4 & (12)(34) \\ -1 & & g \in \rho_5 & (12) \end{cases}$$

c) Laat zien dat χ_3 irreducibel is.

Antwoord:

We berekenen

$$\begin{aligned} \langle \chi_3, \chi_3 \rangle &= \tfrac{1}{24}\left(1 \cdot 3^2 + 8 \cdot 0^2 + 6 \cdot 1^2 + 3(-1)^2 + 6(-1)^2\right) \\ &= \tfrac{1}{24}(9 + 6 + 3 + 6) = 1 \end{aligned}$$

Hieruit volgt dat χ_3 irreducibel is.

d) De kubus $\mathbb{K}$ heeft drie symmetrie-assen van orde 4. Deze gaan door de middens van twee overstaande zijvlakken. K permuteert deze drie assen.
Bepaal het karakter ξ van de bijbehorende 3-dimensionale permutatievoorstelling van K.

Antwoord:

Net als in b) zien we aan het plaatje:

$$\xi_g = \begin{cases} 3 & \text{als} & g \in \rho_1 \\ 0 & & g \in \rho_2 \\ 1 & & g \in \rho_3 \\ 3 & & g \in \rho_4 \\ 1 & & g \in \rho_5 \end{cases}$$

e) Bereken de inprodukten $\langle \xi, \xi \rangle$ en $\langle \xi, \chi_0 \rangle$, waarbij χ_0 het triviale karakter van K is.

Antwoord:

$$\begin{aligned} \langle \xi, \xi \rangle &= \tfrac{1}{24}\left(1 \cdot 3^2 + 8 \cdot 0^2 + 6 \cdot 1^2 + 3 \cdot 3^2 + 6 \cdot 1^2\right) \\ &= \tfrac{1}{24}(9 + 6 + 27 + 6) \\ &= 2 \\ \langle \xi, \chi_0 \rangle &= (1 \cdot 3 \cdot 1 + 8 \cdot 0 \cdot 1 + 6 \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot 3 \cdot 1 + 6 \cdot 1 \cdot 1) \\ &= \tfrac{1}{24}(3 + 6 + 9 + 6) \\ &= 1 \end{aligned}$$

f) Ontbind ξ in irreducibele karakters.

Antwoord:

Uit $\langle \xi, \xi \rangle = 2$ volgt dat ξ de som is van 2 irreducibele karakters.

Uit $\langle \xi, \chi_0 \rangle = 1$ volgt dat χ_0 voorkomt in deze som:

dus:

$$\xi = \chi_0 + \chi_2$$

met

	ρ_1	ρ_2	ρ_3	ρ_4	ρ_5
χ_2 :	2	-1	0	2	0

Het is automatisch dat χ_2 irreducibel is.

g) De kubus $\mathbb{K}$ heeft zes symmetrie-assen van orde 2. Deze gaan door de middens van twee overstaande ribben. K permuteert deze zes assen.
Bepaal het karakter ψ van de bijbehorende 6-dimensionale permutatievoorstelling van K.

Antwoord:

Weer plaatjes kijken, levert:

$$\psi_g = \begin{cases} 6 & \text{als} \quad g \in \rho_1 \\ 0 & \quad\quad\; g \in \rho_2 \\ 0 & \quad\quad\; g \in \rho_3 \\ 2 & \quad\quad\; g \in \rho_4 \\ 2 & \quad\quad\; g \in \rho_5 \end{cases}$$

h) Bereken de inprodukten $\langle\psi, \psi\rangle$ en $\langle\psi, \xi\rangle$. **Antwoord**:

$$\begin{array}{rcl} \langle\psi, \psi\rangle & = & \frac{1}{24}\left(1 \cdot 6^2 + 8 \cdot 0^2 + 6 \cdot 0^2 + 3 \cdot 2^2 + 6 \cdot 2^2\right) \\ & = & \frac{1}{24}(36 + 12 + 24) \\ & = & 3 \\ \langle\psi, \xi\rangle & = & (1 \cdot 6 \cdot 3 + 8 \cdot 0 \cdot 0 + 6 \cdot 0 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \cdot 3 + 6 \cdot 2 \cdot 1) \\ & = & \frac{1}{24}(18 + 18 + 12) \\ & = & 2 \end{array}$$

i) Bewijs dat $\psi - \xi$ een irreducibel karakter van K is.

Antwoord:

Uit $\langle\psi, \psi\rangle = 3$ volgt dat ψ de som is van 3 irreducibele karakters.

Uit $\langle\psi, \xi\rangle = 2$ volgt dat ψ 2 irreducibele karakters met ξ gemeen heeft

Uit $\langle\xi, \xi\rangle = 2$ volgt dat ξ de som is van 2 irreducibele karakters

Zo blijkt dat ψ de som is van ξ en nog één irreducibel karakter, oftewel $\psi - \xi$ is een irreducibel karakter.

j) Geef de volledige karaktertabel van K.

Antwoord:

	(1)	(123)	(1234)	(12)(34)	(12)
	ρ_1	ρ_2	ρ_3	ρ_4	ρ_5
χ_0	1	1	1	1	1
χ_3	3	0	1	-1	-1
$\xi - \chi_0 = \chi_2$	2	-1	0	2	0
$\psi - \xi = \chi_3'$	3	0	-1	-1	1
χ_1	1	1	-1	1	-1

Toelichting: χ_1 uit orthogonaliteit kolommen.