

Topologie en Meetkunde A (TOPOa) 2 mei 2002

DIT TENTAMEN BESTAAT UIT 4 OPGAVEN; ZIE OOK DE ACHTERKANT. SUCCES!

Opgave 1

In deze opgave is X steeds \mathbb{R} of \mathbb{R}^2 , met de standaard-topologie. Gegeven is steeds een deelverzameling A van X .

Bepaal in ieder van de onderstaande gevallen, de verzamelingen \bar{A} , A^{inw} en A' (resp. de afsluiting, het inwendige en de verzameling limietpunten van A). Een bewijs wordt niet gevraagd.

- $X = \mathbb{R}$, $A = [0, 1) \cup (1, 2]$
- $X = \mathbb{R}$, $A = \{x \mid x \in \mathbb{Q}, 0 < x < 1\}$
- $X = \mathbb{R}^2$, $A = \{(x, y) \mid x > 0, y = \frac{1}{x}\}$
- $X = \mathbb{R}^2$, $A = \{(x, y) \mid x > 0, 0 \leq y \leq |\sin(\frac{1}{x})|\}$
- $X = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{Z}$

Opgave 2

Laat A een deelruimte zijn van een topologische ruimte X . Veronderstel, dat A samenhangend is.

- Bewijs de stelling, dat \bar{A} samenhangend is.
- Stel nu, dat $f : X \rightarrow Y$ een continue functie is. Bewijs, dat $f(A)$ samenhangend is.

Opgave 3

Gegeven is een metrische ruimte X met metriek $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$.

- Bewijs, dat X een Hausdorff-ruimte is.
- Stel, dat $A \subset X$ compact is en dat $x \notin A$. Bewijs, dat er een $\varepsilon > 0$ is, zodat $B(x, \varepsilon)$ disjunct is met A .
- Laat weer $A \subset X$ compact zijn. Bewijs, dat A begrensd is.

Opgave 4

In deze opgave beschouwen we de volgende deelverzameling A van \mathbb{R} :

$$A = \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{k} \mid k \in \mathbb{N} \right\}$$

Hieronder worden drie topologieën op \mathbb{R} gedefinieerd. Ga voor elk van deze topologieën na, of A compact is m.b.t. de deelruimte-topologie.

- De standaard-topologie.

- b) De “spelden” (of lower limit) topologie, die voortgebracht wordt door basis-open verzamelingen van de vorm $[a, b)$ (voor $a < b$).
- c) De upper limit topologie, die voortgebracht wordt door basis-open verzamelingen van de vorm $(a, b]$ (voor $a < b$).