Mathematisch Instituut, Faculteit Wiskunde en Informatica, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de $\mathcal{TBC}$ van A–Eskwadraat.
Het college WISB341 werd in 2004/2005 gegeven door M. Crainic.

Topologie en Meetkunde (WISB341)
31 augustus 2005

Opgave 1

Laat X de deelverzameling $\mathbb{R}_{>0}$ van $\mathbb{R}$ zijn. We beschouwen de volgende 3 functies van $X \times X$ naar $\mathbb{R}$:

a) $d_1(x, y) = |\ln(\frac{x}{y})|$

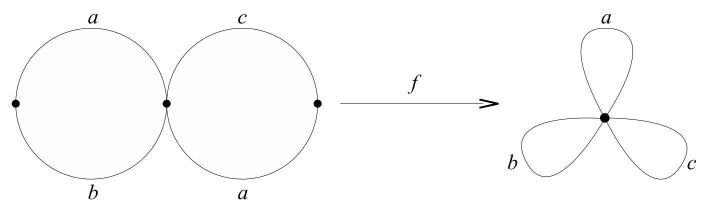
b) $d_2(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{als} \quad x = y \\ \frac{x+y}{2} & \text{als} \quad x \neq y \end{cases}$

c) $d_3(x, y) = |x - y| - (\ulcorner |x - y| \urcorner)$, waarbij $\ulcorner x \urcorner = \max\{k \in \mathbb{Z} | k \leq x\}$

Bepaal voor elk van d_1, d_2 en d_3 of het een metriek op X is, en zo ja, wat de bijbehorende topologie op X is.

Opgave 2

Beschouw de continue afbeelding $f : X \to Y$ die aangegeven wordt in het volgende plaatje:



Hierbij worden beide ruimten gezien als deelruimten van $\mathbb{R}^2$. Kies zelf een oriëntatie voor de segmenten van X en Y.

a) Laat zien dat f een quotiëntafbeelding is.

b) Is f een overdekkingsafbeelding? Motiveer je antwoord.

c) Geef de fundamentaalgroepen van X en Y en ook het groepshomomorfisme f_* dat door de afbeelding f wordt bepaald.

Opgave 3

a) Laat $f : E \to B$ een overdekkingsafbeelding zijn. Stel $f(a) = b$. Bewijs: als $A \subset B$ zodat $b \in \overline{A}$, dan geldt $a \in \overline{f^{-1}(A)}$.

b) Geef een voorbeeld waaruit blijkt dat het gestelde in a) niet hoeft op te gaan voor een willekeurige continue, surjectieve afbeelding.

Opgave 4

Laat X de verzameling $(S^1-\{(1,0)\}\cup\{A,B\}$, waar A en B twee nieuwe elementen zijn. We definiëren een topologie op X door de volgende basis-open verzamelingen:

- alle deelverzamelingen U van $S^1-\{(1,0)\}$ die open zijn in de Euclidische topologie van S^1;
- alle deelverzamelingen van de vorm $U-\{(1,0)\}\cup\{A\}$, waar U een omgeving van (1,0) is in de Euclidische topologie van S^1;
- alle deelverzamelingen van de vorm $U-\{(1,0)\}\cup\{B\}$, waar U een omgeving van (1,0) is in de Euclidische topologie van S^1;

Beantwoord de volgende vragen:

a) Is X een Hausdorffruimte?

b) Is X samenhangend?

c) Is X compact?

d) Bepaal m.b.v. de stelling van Seifert en Van Kampen de fundamentaalgroep van X.