Herkansingstentamen Topologie en Meetkunde A

11 juli 2001, 9.00–12.00

1) i) Laat X en Y topologische ruimtes zijn, Y Hausdorff en $f : X \to Y$ continu en bijectief.
Bewijs: X is Hausdorff.

ii) Bewijs dat in een Hausdorffruimte de éénpuntsverzamelingen gesloten zijn.

2) Zij X een compacte ruimte, $A \subset X$ gesloten.

i) Bewijs, dat A compact is.

ii) Zij Y een topologische ruimte, $f : X \to Y$ continu.
Bewijs, dat $f(X)$ compact is.

3) Zij X een topologische ruimte, A een deelruimte.

i) Veronderstel dat A compact is in de relatief topologie.
Blijft deze eigenschap behouden voor fijnere topologieën op X, respectievelijk grovere topologieën?
In beide gevallen: zo ja, bewijs; zo nee, geef een tegenvoorbeeld.

ii) Veronderstel nu A samenhangend.
Blijft deze eigenschap behouden voor fijnere topologieën op X, respectievelijk grovere topologieën?
In beide gevallen: zo ja, bewijs; zo nee, geef een tegenvoorbeeld.

4) In deze opgave zijn A en B deelverzamelingen van een topologische ruimte X; met A^{inw} geven we het inwendige van A aan; met $\overline{A}$ de afsluiting van A.

Veronderstel dat $A^{\text{inw}} \subset B \subset \overline{A}$.

i) Toon aan: $A^{\text{inw}} \subset B^{\text{inw}}$ en $\overline{B} \subset \overline{A}$.

ii) Geldt $\overline{B} = \overline{A}$? Zo ja, bewijs; zo nee, geef een tegenvoorbeeld.