Herkansingstentamen Topologie en Meetkunde, 11-07-01

Beknopte uitwerking

1 i) Stel $x, y \in X$ met $x \neq y$. f is bijectief dus $f(x) \neq f(y)$ in Y. Y is Hausdorff dus er zijn open $V, W \subset Y$ met $f(x) \in V$, $f(y) \in W$ en $V \cap W = \emptyset$. Laat $A = f^{-1}(V)$, $B = f^{-1}(W)$. Dan zijn A en B open in X (want f is continu), $x \in A$, $y \in B$, en $A \cap B = \emptyset$. Dus X is Hausdorff.
ii) Stel $x \in X$; we moeten laten zien dat $\{x\}$ gesloten is in X. Voor elke $y \in X$, $y \neq x$ is er vanwege de Hausdorff-eigenschap een open U_y met $y \in U_y$, $x \notin U_y$. Er volgt dat $X - \{x\} = \bigcup_{y \neq x} U_y$, dus $X - \{x\}$ is open in X, zodat $\{x\}$ gesloten is.
Anders: als $y \notin \{x\}$, is er open U_y rond y met $U_y \cap \{x\} = \emptyset$. Met andere woorden: $y \notin \overline{\{x\}}$. Dus $\{x\} = \overline{\{x\}}$.

2 i) Stel, dat $\{U_i \mid i \in I\}$ een open overdekking is van A. A is gesloten, dus $X - A$ is open. Dus

$$\{U_i \mid i \in I\} \cup \{X - A\}$$

is een open overdekking van X. X is compact, dus deze overdekking heeft een eindige deel-overdekking:

$$\{U_1, \ldots, U_n\} \cup \{X - A\}$$

Maar dan is $\{U_1, \ldots, U_n\}$ een overdekking van A; dit is een eindige deel-overdekking van de oorspronkelijke overdekking. Deze was willekeurig, zodat we concluderen dat A compact is.
ii) Stel nu, dat $\{U_i \mid i \in I\}$ een open overdekking is van $f(X)$. Dan geldt voor elke $x \in X$, dat er een i is met $f(x) \in U_i$ oftewel, $x \in f^{-1}(U_i)$. Anders gezegd, $\{f^{-1}(U_i) \mid i \in I\}$ is een overdekking van X met open verzamelingen (want f is continu). Per compactheid van X heeft deze een eindige deel-overdekking: $\{f^{-1}(U_1), \ldots, f^{-1}(U_n)\}$. Maar dan is $\{U_1, \ldots, U_n\}$ een overdekking van $f(X)$ en dit is een eindige deel-overdekking van de oorspronkelijke. Dus $f(X)$ is compact.

3 i) Schrijf X als $(X, \mathcal{T})$ waar $\mathcal{T}$ de topologie is. Veronderstel eerst A compact.

Als $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$ is A ook compact voor $\mathcal{T}'$; immers elke open overdekking van A voor $\mathcal{T}'$ is er ook een voor $\mathcal{T}$, en heeft dus een eindige deel-overdekking. De eigenschap is dus behouden onder grovere topologieën.

Niet onder fijnere: $[0, 1]$ is compact als deel van $\mathbb{R}$ maar niet voor de speldentopologie of discrete topologie.

Veronderstel nu $A \subset X$ samenhangend.

Als $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$ is A ook samenhangend voor $\mathcal{T}'$; immers een eventuele splitsing van A (voor $\mathcal{T}'$) zou ook een splitsing zijn voor $\mathcal{T}$. Dus de eigenschap is behouden onder grovere topologieën.

Niet onder fijnere: bijv. $[0, 1]$ is samenhangend in $\mathbb{R}$ maar niet voor de speldentopologie (lower limit topology) of de discrete topologie.

4 i) Gegeven is $A^{\text{inw}} \subset B \subset \overline{A}$.

B^{inw} is de *grootste* open verzameling die bevat is in B; omdat A^{inw} open is, volgt met het gegeven, dat $A^{\text{inw}} \subset B^{\text{inw}}$. Volkomen symmetrisch: $\overline{B}$ is de *kleinste* gesloten verzameling waarin B bevat is; omdat $\overline{A}$ gesloten is, volgt met het gegeven dat $\overline{B} \subset \overline{A}$.

ii) $\overline{A} = \overline{B}$ hoeft *niet* te gelden. Neem bijvoorbeeld $X = \mathbb{R}$, $A = \{0\}$, $B = \emptyset$. Er geldt $A^{\text{inw}} = \emptyset \subset B \subset \overline{A}$; echter, $\overline{A} = \{0\} \neq \emptyset = \overline{B}$.