Tentamen Topologie, 28 juni 2000,

Zaal BBL, 105 B.
Geef niet alleen antwoorden. Succes!

1. (a) Bewijs dat een topologie op een eindige ruimte die aan de Hausdorffeigenschap voldoet vanzelf de diskrete topologie is.
   (b) Laat X en Y de coeindige topologie hebben. Wanneer is de produkttopologie op $X \times Y$ ook de coeindige topologie?
   (c) Beschrijf alle topologieën op de verzameling $\{1, 2, 3\}$ waarvoor deze een samenhangende ruimte wordt.

2. Sorteer de volgende ruimten volgens homeomorfie (en als altijd, beargumenteer uw antwoord):
   (a) $[0, 1]$,
   (b) S^1,
   (c) de vereniging van de eenheidscirkel in $\mathbb{R}^2$ en het interval op de x-as met eindpunten $(-1, 0)$ en $(1, 0)$,
   (d) de vereniging van de eenheidscirkel in $\mathbb{R}^2$ en de cirkel met middelpunt $(0, 2)$ en straal 3,
   (e) het kruis: $\{(x, y) : xy = 0, |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$

3. Beargumenteer dat de volgende ruimten lokaal-compacte Hausdorffruimten zijn en beschrijf (of teken) voor ieder van deze ruimten een eenvoudige ruimte die homeomorf is met zijn éénpuntscompactificatie:
   (a) $[0, 1) \times \{1, 2\}$,
   (b) $\mathbb{R}^2 - \{p\}$ voor een $p \in \mathbb{R}^2$,
   (c) de ruimte die verkregen wordt uit $[0, 1] \times (-1, 1)$ door voor alle $x \in (-1, 1)$, $(0, x)$ met $(1, -x)$ te identificeren.
   (d) de ruimte die verkregen wordt uit $[0, 1] \times [0, 1)$ door voor alle $x \in [0, 1)$, $(0, x)$ met $(1, x)$ te identificeren

4. (a) Noem de twee cirkels in deel (d) van opgave 2 S_1 en S_2, noteer hun gemeenschappelijk punt $(-1,0)$ met p en hun vereniging met S. Bewijs dat er voor $i = 1,2$ een retractie $r_i : S \to S_i$ bestaat.

(b) De retractie r_i bepaalt een homomorfisme van groepen

$$\pi(r_i) : \pi(S,p) \to \pi(S_i,p) \cong \mathbb{Z}.$$

Bewijs dat dit surjektief is.

(c) Bewijs dat ook de afbeelding

$$(\pi(r_1), \pi(r_2)) : \pi(S,p) \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

die deze twee als componenten heeft surjektief is.

(d) Sorteer nu de ruimten genoemd in opgave 2 volgens homotopie-equivalentie.