HERKANSINGSTENTAMEN TOPOLOGIE, 21 JUNI 1999
VAN UNNIKGEBOUW, ZAAL 211 VAN 9:00-12:00 UUR

Geef niet alleen antwoorden. Succes!

1. Een *speld* op $\mathbb{R}$ is een interval $[a, b)$ met $a < b$.
   (a) Laat zien dat deze collectie spelden een basis is voor een topologie op $\mathbb{R}$. In het vervolg geven we de reële rechte voorzien van deze topologie aan met $\mathbb{R}_s$, terwijl $\mathbb{R}$ zal blijven staan voor de dezelfde verzameling voorzien van de euclidische topologie.
   (b) De identiteit definieert afbeeldingen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_s$ en $\mathbb{R}_s \to \mathbb{R}$. Welke van deze is continu?
   (c) Bepaal de samenhangscomponenten van $\mathbb{R}_s$.
   (d) Is $\mathbb{R}_s$ Hausdorffs? Lokaal-compact?
   (e) De topologie van een rechte, beschouwd als deelruimte van $\mathbb{R}_s \times \mathbb{R}_s$, hangt af van zijn richtingscoëfficiënt. Hoe? En wat voor topologieën krijgen we zo?

2. We geven de verzameling cijfers $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ de diskrete topologie en vervolgens $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}^{\mathbb{N}}$ de produkttopologie. Laat $f : \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ de afbeelding zijn die aan $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ het getal $\sum_{n=1}^{\infty} x_n 10^{-n}$ toevoegt.
   (a) Bewijs dat $f$ continu is.
   (b) Geef nu de reële rechte de speldentopologie (zie som 1) en beschouw $f$ als afbeelding naar $\mathbb{R}_s$. Is $f$ dan nog steeds continu?
   (c) Laat $X \subset \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}^{\mathbb{N}}$ de deelruimte zijn bestaande uit de rijtjes waarin oneindig veel termen $\neq 9$ voorkomen. Dan geeft $f$ een bijektie van $X$ op $[0, 1)$ (dit hoeft niet bewezen te worden). Zal $f$ een homeomorfisme van $X$ op $[0, 1)$ kunnen zijn?

3. Beargumenteer dat de volgende ruimten lokaal-compacte Hausdorffruimten zijn en beschrijf (of teken) voor ieder van deze ruimten een eenvoudige ruimte die homeomorf is met zijn éénpuntscompactificatie:
   (a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y > 0\}$,
   (b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y \geq 0\}$,
   (c) de *open Möbiusband* $M$ gedefinieerd als quotientruimte van $S^1 \times \mathbb{R}$ door $(z, t)$ met $(-z, -t)$ te identificeren.

4. Hier is $M$ de open Möbiusband als gedefinieerd in som 3. Laat $f : \mathbb{R}^2 \to M$ de afbeelding zijn gedefinieerd door $f(x, t) = [(\cos x, \sin x, t)]$.
   (a) Bewijs dat $f$ een overdekkingsafbeelding is.
   (b) Bepaal de fundamentaalgroep van $M$.