Uitwerking tentamen Topologie, 21 juni 1999

1. Een *speld* op $\mathbb{R}$ is een interval $[a,b)$ met $a<b$.

1a. Laat zien dat deze collectie spelden een basis is voor een topologie op $\mathbb{R}$.
Twee dingen moeten gecontroleerd worden: (1) ieder reëel getal x behoort tot een speld en (2) als a behoort tot twee spelden $[a_1,b_1)$, $[a_2,b_2)$, dan is er een derde $[a,b)$ die bevat is in hun doorsnede en x nog steeds bevat. In het eerste geval nemen we $[x,x+1)$ en het tweede geval $a=\max\{a_1,a_2\}$ en $b=\min\{b_1,b_2\}$.

In het vervolg geven we de reële rechte voorzien van deze topologie aan met $\mathbb{R}_s$, terwijl $\mathbb{R}$ zal blijven staan voor de dezelfde verzameling voorzien van de euclidische topologie.

1b. De identiteit definieert afbeeldingen $\mathbb{R}\to\mathbb{R}_s$ en $\mathbb{R}_s\to\mathbb{R}$. Welke van deze is continu?
De afbeelding $\mathbb{R}\to\mathbb{R}_s$ is niet continu, want er zijn open delen van $\mathbb{R}_s$ zoals $[0,1)$ die niet open zijn voor $\mathbb{R}$. De afbeelding $\mathbb{R}_s\to\mathbb{R}$ is dat wel: ieder open deel van $\mathbb{R}$ is ook open in $\mathbb{R}_s$, immers ieder basiselement (a,b) van $\mathbb{R}$ met $a<b$ is te schrijven is als de vereniging van spelden $[a_i,b)$, waar $a_i\in(a,b)$ convergeert naar a.

1c. Bepaal de samenhangscomponenten van $\mathbb{R}_s$.
Dit zijn de losse punten, want als $C\subset\mathbb{R}_s$ minstens twee verschillende punten a,b heeft, dan is $\{C\cap(-\infty,\frac{1}{2}(a+b)),C\cap[\frac{1}{2}(a+b),\infty)\}$ een splitsing.

1d. Is $\mathbb{R}_s$ Hausdorffs? Lokaal-compact?
$\mathbb{R}_s$ is Hausdorffs: als $a<b$, dan zijn $[a,b)$ en $[b,\infty)$ disjunte omgevingen. $\mathbb{R}_s$ is niet lokaal compact: Stel wel, Dan is er een compact deel K van $\mathbb{R}_s$ dat 0 als inwendig punt heeft. Er is dus een $b>0$ met $[0,b)\subset K$. Kies een stijgende rij $(b_n)_{n=0}^\infty$ in $[0,b)$ die naar b convergeert met $b_0=0$. Dan is $\{[b_{i-1},b_i)\}_{i=1}^\infty\}\cup\{(-\infty,0)\cap K,[b,\infty)\cap K\}$ een oneindige overdekking van K zonder eindige deeloverdekking. Dit spreekt het compact zijn van K tegen.

1e. De topologie van een rechte, beschouwd als deelruimte van $\mathbb{R}_s\times\mathbb{R}_s$, hangt af van zijn richtingscoëfficiënt. Hoe? En wat voor topologieën krijgen we zo?
Een basis voor de topologie van $\mathbb{R}_s\times\mathbb{R}_s$ bestaat uit de collectie $[a_1,b_1)\times[a_2,b_2)$. Als $L\subset\mathbb{R}_s\times\mathbb{R}_s$ een rechte is met richtingscoëfficiënt in het eerste kwadrant, dan is $L\cap([a_1,b_1)\times[a_2,b_2))$ leeg of een speld in L. Dus de geïnduceerder topologie op L is dan de speldentopologie en L is homeomorf met $\mathbb{R}_s$. Maar als de richtingscoëfficiënt negatief is dan, kan $L\cap([a_1,b_1)\times[a_2,b_2))$ uit het enkele punt (a_1,a_2) bestaan en ieder punt van L komt zo voor. Dus L heeft dan de diskrete topologie.

2. We geven de verzameling cijfers $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ de diskrete topologie en vervolgens $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}^{\mathbb{N}}$ de produkttopologie. Definieer $f:\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}^{\mathbb{N}}\to\mathbb{R}$ als de afbeelding die aan $x=(x_n)_{n=1}^\infty$ het getal $\sum_{n=1}^\infty x_n10^{-n}$ toevoegt.

2a. Bewijs dat f continu is.
Zij $V\subset\mathbb{R}$ open en $a=(a_n)_{n=1}^\infty\in f^{-1}V$. We moeten laten zien dat er een omgeving is van a die door f in V wordt afgebeeld. Kies $n\in\mathbb{N}$ met $[f(a)-10^{-n},f(a)+10^{-n}]\subset V$. Als nu $x=(x_n)_{n=1}^\infty$ zo dat $x_i=a_i$ voor $i=1,2\dots,n$, dan is $|f(x)-f(a)|\le\sum_{i>n}9\cdot10^{-i}=10^{-n}$ en dus is $f(x)\in V$. De collectie x met deze eigenschap is een basisomgeving U_n van a in $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}^{\mathbb{N}}$.

2b. Geef nu de reële rechte de speldentopologie (zie som 1) en beschouw f als afbeelding naar $\mathbb{R}_s$. Is f dan nog steeds continu?

Nee: neem bijvoorbeeld $a = (3, 3, 3, 3, \ldots)$ (maar iedere a die niet op nullen eindigt werkt). Dan is $V = [f(a), \infty)$ een open omgeving van $f(a)$. Als een omgeving van a door f in V wordt afgebeeld, dan geldt dat ook voor een zekere basisomgeving U_n. Maar de rij $x = (3, 3, 3, \ldots, 3, 0, 0, 0, 0, \ldots)$ (nul vanaf index n) is in U_n en er geldt $f(x) < f(a)$, dus $f(U_n)$ niet bevat in V. Tegenspraak.

2c Laat $X \subset \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}^{\mathbb{N}}$ de deelruimte zijn bestaande uit de rijtjes waarin oneindig veel termen $\neq 9$ voorkomen. Dan geeft f een bijektie van X op $[0, 1)$ (dit hoeft niet bewezen te worden). Zal f een homeomorfisme van X op $[0, 1)$ (beschouwd als deelruimte van $\mathbb{R}$) kunnen zijn?
Nee: X is niet samenhangend: een splitsing van X is b.v. de verzameling X_0 van rijen in X die met 0 beginnen en $X - X_0$. Maar $[0, 1)$ is dat wel.

3. Beargumenteer dat de volgende ruimten lokaal-compacte Hausdorffruimten zijn en beschrijf (of teken) voor ieder van deze ruimten een eenvoudige ruimte die homeomorf is met zijn éénpuntscompactificatie:

3a. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$

Deze ruimte is een produkt: $\mathbb{R} \times (0, \infty)$, en omdat $(0, \infty)$ homeomorf is met $\mathbb{R}$, dus homeomorf met $\mathbb{R}^2$. De laatste Hausdorffs en lokaal-compact en zijn éénpuntscompactificatie is via stereografische projektie homeomorf met de tweesfeer.

3b. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}$

Deze ruimte is lokaal-compact Hausdorffs als produkt van $\mathbb{R}$ en $[0, \infty)$ (ook andere argumenten zijn mogelijk). Stereografische projektie geeft een homeomorfisme van deze ruimte op een gesloten halfrond (begrensd door een meridiaan) minus de noordpool. Dit is op zijn beurt homeomorf met een gesloten schijf minus een randpunt. Een gesloten schijf is compact, dus de éénpuntscompactificatie is hiermee homeomorf.

3c. De *open Möbiusband M* gedefinieerd als quotiëntruimte van $S^1 \times \mathbb{R}$ door (z, t) met $(-z, -t)$ te identificeren.

Door projektie op de tweesfeer zien we dat M homeomorf is met de quotiëntruimte van de tweesfeer minus zijn polen volgens identifikatie van antipoden. Deze quotiëntruimte is het complement van een punt van het projektieve vlak. De laatste is compact Hausdorffs. Dus M is lokaal-compact Hausdorffs en zijn éénpuntscompactificatie is homeomorf met het projektieve vlak.

4. Hier is M de open Möbiusband als gedefinieerd in som 3. Laat $f : \mathbb{R}^2 \to M$ de afbeelding zijn gedefinieerd door $f(x, t) = [(\cos x, \sin x, t)]$.

4a. Bewijs dat f een overdekkingsafbeelding is.

M wordt overdekt door open delen U die beeld zijn van $C \times \mathbb{R}$ met $C \subset S^1$ een open cirkelboog van hoek π. Voor zo'n U is $f^{-1}U$ van de vorm $(\mathbb{R} - (a + \mathbb{Z}\pi)) \times \mathbb{R}$ voor een $a \in \mathbb{R}$. Dit is te schrijven als de disjunkte vereniging van de open delen $(a + k\pi, a + (k + 1)\pi) \times \mathbb{R}$. Ieder van deze delen wordt door f homeomorf op U afgebeeld.

4b. Bepaal de fundamentaalgroep van M.

Laat $p := f(0, 0)$. De ruimte $\mathbb{R}^2$ is enkelvoudig samenhangend, dus we weten dat er een bijektie is tussen $f^{-1}(p) = \mathbb{Z}\pi \times \{0\} \cong \mathbb{Z}$ en $\pi(M, p)$. Die wordt gegeven als volgt: gegeven $a \in \mathbb{Z}$, neem een weg van $(0, 0)$ naar $(a\pi, 0)$ en neem daarvan de weghomotopieklasse van zijn beeld in M. De zo gevonden bijektie $\mathbb{Z} \to \pi(M, p)$ is een homomorfisme van groepen (argument als voor de cirkel) en dus een isomorfisme van groepen. Conlusie: $\pi(M, p) \cong \mathbb{Z}$