Departement Wiskunde, Faculteit Bètawetenschappen, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de $\mathcal{TBC}$ van A–Eskwadraat.
Het college WISB341 werd in 2004/2005 gegeven door .

# Topologie en Meetkunde A (WISB341)
# 20 april 2005

## Opgave 1

Laat $X$ een topologische ruimte zijn. We definiëren een relatie $<$ tussen punten van $X$ door: $x < y$ precies als $y$ een limietpunt is van de verzameling $\{x\}$.

a) Bewijs dat als $x < y$, dan $x \neq y$.

b) Bewijs dat voor elke $x \in X$ de verzameling

$$\{y \in X \mid y \neq x \text{ en } x \not< y\}$$

open is in $X$.

c) Geef een voorbeeld van een ruimte $X$ en punten $x, y \in X$ zodat zowel $x < y$ als $y < x$ waar zijn.

## Opgave 2

Laat $X$ een metrische ruimte zijn en $A \subset X$ een deelruimte.

a) Bewijs: als $x \in A'$ dan is er een rijtje $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $A$, dat naar $x$ convergeert.

b) Stel, dat $A$ de eigenschap heeft dat wanneer $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een rijtje in $A$ is dat naar een punt $x \in X$ convergeert, er volgt dan $x \in A$.

Bewijs, dat $A$ gesloten is in $X$.

c) Stel omgekeerd dat $A$ gesloten is in X; laat zien dat als $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een rijtje in $A$ is dat convergeert naar $x \in X$, dan $x \in A$.

## Opgave 3

Laat $A = (\mathbb{R} - \{0\}) \cup \{a, b\}$. We definiëren een topologie op $A$ door de volgorde basis-open verzamelingen:

- $(q, r)$ voor $q < r \leq 0$
- $(r, q)$ voor $0 \leq r < q$
- $(q, 0) \cup \{a\} \cup (0, r)$ voor $q < 0 < r$
- $(q, 0) \cup \{b\} \cup (0, r)$ voor $q < 0 < r$

a) Laat zien dat $A$ samenhangend is.

b) Zij $B = [-1, 0) \cup \{a, b\} \cup (0, 1]$ als deelruimte van $A$. Bewijs, dat $B$ compact is.

c) Laat $f : A \to \mathbb{R}$ gedefinieerd zijn door: $f(x) = x$ voor $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, en $f(a) = f(b) = 0$. Laat zien dat $f$ een quotiëntafbeelding is.

## Opgave 4

In deze opgave beschouwen we de quotiëntruimte van $\mathbb{R}^2$ die ontstaat door de $X$-as tot één punt samen te knijpen. Met andere woorden, we nemen de equivalentierelatie $\sim$ die op $\mathbb{R}^2$ gedefinieerd door:
$(x, y) \sim (x', y')$ precies als ($x = x'$ en $y = y'$) of ($y = y' = 0$).
Vervolgens geven we $\mathbb{R}^2/\sim$ de quotiënttopologie. We noemen de resulterende topologische ruimte $X$. Laat $A \in X$ de equivalentieklasse van $(0, 0)$ zijn.

a) Bewijs, dat $X$ een Hausdorffruimte is.

b) Laat zien dat in $X$, het rijtje $([(3, \frac{1}{n})])_{n\in\mathbb{N}}$ convergeert naar $A$ (hier geeft $[(3, \frac{1}{n})]$ de equivalentieklasse van $(3, \frac{1}{n})$ aan).

c) Convergeert het rijtje $([(n, \frac{1}{n})])_{n\in\mathbb{N}}$ naar $A$? Motiveer je antwoord.