Tentamen Topologie en Meetkunde A

20 april 2005, 14.00–17.00

beknopte uitwerking

Opgave 1:

Laat X een topologische ruimte zijn. We definiëren een relatie $<$ tussen punten van X door: $x < y$ precies als y een limietpunt is van de verzameling $\{x\}$.

a) Bewijs dat als $x < y$, dan $x \neq y$.

b) Bewijs dat voor elke $x \in X$ de verzameling

$$\{y \in X \mid y \neq x \text{ en } x \not< y\}$$

open is in X.

c) Geef een voorbeeld van een ruimte X en punten $x, y \in X$ zodat zowel $x < y$ als $y < x$ waar zijn.

Uitwerking:

a) Stel $x < y$, dan is y limietpunt van $\{x\}$. Dus elke omgeving van y snijdt de verzameling $\{x\} - \{y\}$; dit kan alleen als $x \neq y$.

b) Laat $U = \{y \in X \mid y \neq x \text{ en } x \not< y\}$. We laten zien dat elke $y \in U$ een open omgevig heeft die bevat is in U. Als $y \in U$ dan heeft y een open omgeving V_y zodat $V_y \cap \{x\} = \emptyset$. Er volgt, dat voor elke $z \in V_y$, $z \in U$. Dus $V_y \subset U$.

c) Neem $X = \{0, 1\}$ met de indiscrete topologie. Er geldt $0 < 1$ en $1 < 0$.

Opgave 2:

Laat X een metrische ruimte zijn en $A \subset X$ een deelruimte.

a) Bewijs: als $x \in A'$ dan is er een rijtje $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in A, dat naar x convergeert.

b) Stel, dat A de eigenschap heeft dat wanneer $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een rijtje in A is dat naar een punt $x \in X$ convergeert, er volgt dat $x \in A$.

   Bewijs, dat A gesloten is in X.

c) Stel omgekeerd dat A gesloten is in X; laat zien dat als $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een rijtje in A is dat convergeert naar $x \in X$, dan $x \in A$.

Uitwerking:

a) Voor elke n geldt dat $B(x, \frac{1}{n}) \cap (A - \{x\}) \neq \emptyset$; kies x_n in deze verzameling. Het rijtje $(x_n)_n$ ligt in A en convergeert naar x.

b) Als $x \in A'$ dan is er volgens a) een rijtje in A dat naar x convergeert, dus het gegeven impliceert nu dat $x \in A$. Dus A bevat al zijn limietpunten, en is daarom gesloten.

c) Als $x \notin A$ dan is $X - A$ een open omgeving van x die A mijdt; deze open omgeving bevat dus geen enkele x_n. Dit is in strijd metde aanname dat x_n naar x convergeert.

Opgave 3:
Laat $A = (\mathbb{R} - \{0\}) \cup \{a, b\}$. We definiëren een topologie op A door de volgende basis-open verzamelingen:

- (q, r) voor $q < r \leq 0$
- (r, q) voor $0 \leq r < q$
- $(q, 0) \cup \{a\} \cup (0, r)$ voor $q < 0 < r$
- $(q, 0) \cup \{b\} \cup (0, r)$ voor $q < 0 < r$

a) Laat zien, dat A samenhangend is.

b) Zij $B = [-1, 0) \cup \{a, b\} \cup (0, 1]$ als deelruimte van A. Bewijs, dat B compact is.

c) Laat $f : A \to \mathbb{R}$ gedefinieerd zijn door: $f(x) = x$ voor $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, en $f(a) = f(b) = 0$. Laat zien dat f een quotiëntafbeelding is.

Uitwerking:
Bij deze opgave is het handig om op te merken dat de deelruimten $A - \{a\}$ en $A - \{b\}$ beide homeomorf zijn met $\mathbb{R}$.

a) $A = (A - \{a\}) \cup (A - \{b\})$, dus een vereniging van twee samenhangende deelverzamelingen van A (vanwege bovenstaande opmerking) die een niet-lege doorsnede hebben. Dus A is samenhangend.

b) $B - \{a\}$ is homeomorf met $[-1, 1]$, dus compact. Idem voor $B - \{b\}$. Dus B is de vereniging van twee compacte deelverzamelingen van A, en derhalve compact.

c) f is overduidelijk surjectief. f is ook continu want voor elke basis-open verzameling $U \subset \mathbb{R}$ is $f^{-1}(U)$ open in A. Bovendien is f open: voor elke basis-open U van A is $f(U)$ open in $\mathbb{R}$. Dus f, een continue, open surjectie, is een quotiëntafbeelding.

Opgave 4:
In deze opgave beschouwen we de quotiëntruimte van $\mathbb{R}^2$ die ontstaat door de X-as tot één punt samen te knijpen. Met andere woorden, we nemen de equivalentierelatie $\sim$ op $\mathbb{R}^2$ gedefinieerd door:
$(x, y) \sim (x', y')$ precies als $(x = x'$ en $y = y')$ of $(y = y' = 0)$.
Vervolgens geven we $\mathbb{R}^2 / \sim$ de quotiënttopologie. We noemen de resulterende topologische ruimte X. Laat $A \in X$ de equivalentieklasse van $(0, 0)$ zijn.

a) Bewijs, dat X een Hausdorffruimte is.

b) Laat zien dat in X, het rijtje $([(3, \frac{1}{n})])_{n\in\mathbb{N}}$ convergeert naar A (hier geeft $[(3, \frac{1}{n})]$ de equivalentieklasse van $(3, \frac{1}{n})$ aan).

c) Convergeert het rijtje $([(n, \frac{1}{n})])_{n\in\mathbb{N}}$ naar A? Motiveer je antwoord.

Uitwerking:

a) Laat $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/\sim$ de quotiëntafbeelding zijn. Dan is de restrictie van π tot $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y \neq 0\}$ een homeomorfisme op $X - \{A\}$. Er volgt dat $X - \{A\}$ Hausdorffs is. Bovendien is $X - \{A\}$ open in X. Het is dus genoeg om in te zien dat als $[(x, y)] \neq A$, er open U, V zijn met $[(x, y)] \in U$, $A \in V$ en $U \cap V = \emptyset$. Omdat $[(x, y)] \neq A$ is $y \neq 0$. Neem $U = \{[(x', y')] \,|\, |y'| > \frac{1}{2}|y|\}$ en $V = \{[(x', y')] \,|\, |y'| < \frac{1}{2}|y|\}$.

b) Omdat $(3, \frac{1}{n})_n$ in $\mathbb{R}^2$ naar $(3, 0)$ convergeert en π continu is, convergeert $[(3, \frac{1}{n})]_n$ naar $[(3, 0)] = A$.

c) Het antwoord is nee. Laat $U = \{[(x, y)] \,|\, x < 1 \text{ of } y < \frac{1}{x}\}$. U is een open omgeving van A en $[(n, \frac{1}{n}) \neq U$ voor $n > 1$.