Mathematisch Instituut, Faculteit Wiskunde en Informatica, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de $\mathcal{TBC}$ van A–Eskwadraat.
Het college WISB341 werd in 2002-2003 gegeven door Dr. J. van Oosten.

Topologie en Meetkunde A (WISB341)
2 mei

DIT TENTAMEN BESTAAT UIT 4 OPGAVEN; ZIE OOK DE ACHTERKANT. SUCCES!

Opgave 1

Zij X een topologische ruimte. Gegeven een deelverzameling $A \subseteq X$, schrijven we $\overline{A}$ voor de afsluiting van A en A' voor de verzameling limietpunten van A. Bewijs de volgende twee gelijkheden voor deelverzamelingen A en B van X:

a) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

b) $(A \cup B)' = A' \cup B'$.

Opgave 2

Laat (X, d) een metrische ruimte zijn en $x_0 \in X$ een vast gekozen punt.

a) Bewijs dat de functie $f : X \to \mathbb{R}$, gegeven door $f(x) = d(x, x_0)$, continu is (hier heeft $\mathbb{R}$ de standaardtopologie).

b) Stel, dat $Y \subseteq \mathbb{R}$ samenhangend is. Bewijs, dat voor elke $x, y \in Y$ met $x < y$, $[x, y] \subseteq Y$.

c) Laat nu $A \subseteq X$ een samenhangende deelruimte van X zijn. Bewijs dat er voor elk tweetal elementen $a, b \in A$ een $c \in A$ is zodat geldt:
$$d(x_0, c) = \frac{1}{2}(d(x_0, a) + d(x_0, b))$$

Opgave 3

We definiëren de volgende topologie $\mathcal{T}_X$ op $X = [0, 1]$: de open verzamelingen zijn $\emptyset$, X of van de vorm $(a, 1]$ waar $0 < a < 1$.

a) Bewijs, dat $\mathcal{T}_X$ een topologie is.

b) Bepaal de afsluiting van $\{\frac{1}{2}\}$ m.b.t. $\mathcal{T}_X$.

c) Laat ook $Y = [0, 1]$ met topologie $\mathcal{T}_Y$: open verzamelingen zijn $\emptyset$, Y of van de vorm $[0, b)$ met $0 < b < 1$. We beschouwen de product-topologie op $X \times Y$ m.b.t. $\mathcal{T}_X$ en $\mathcal{T}_Y$. Laat zien, dat de verzameling
$$\{(x, y) \mid 0 \leq y < x^2, 0 \leq x \leq 1\}$$
open is in deze topologie.

d) Is de product-topologie van deeltje c) Hausdorff? Motiveer je antwoord.

Opgave 4

Laat $f : X \to Y$ een continue afbeelding zijn, met X compact en Y een Hausdorff ruimte.

a) Laat zien, dat f een gesloten afbeelding is (d.w.z., als $A \subseteq X$ gesloten is, is $f(A) \subseteq Y$ gesloten).

b) Neem nu aan: f is surjectief. Bewijs, dat f een quotient-afbeelding is.

c) Stel nu dat f bijectief is. Bewijs, dat f een homeomorfisme is.