

Tentamen Statistiek

16 december 2002, 14.00-17.00 uur

Schrijf je naam en studentnummer op elk vel dat je inlevert. Het gebruik van het boek van J.A. Rice, aantekeningen, handouts en zakrekenmachines is toegestaan.

1. (a) Zij $(X, Y)^T \sim N(\mu, \Sigma)$ met $\mu = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $\Sigma = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Laat Z_1, \dots, Z_7 een steekproef zijn uit de verdeling van stochast $Z = 3X + 5Y$. Bereken $E\bar{Z}_7$, $\text{Var}(\bar{Z}_7)$, ES_z^2 , $\text{Var}(\frac{3S_z^2}{13})$ en $P(\bar{Z}_7 > S_z \frac{0.906}{\sqrt{7}} + 5)$. Bepaal de verdeling van $(Z, V)^T$ met $V = aX + 2Y$ en alle $a \in \mathbb{R}$ waarvoor Z en V onafhankelijk zijn.
- (b) Gebruikmakend van een multivariate normale verdeling bereken

$$\frac{2003}{4\pi} \iint (2x + 4y)^2 e^{-(x^2 + 2xy + 2y^2)} dx dy.$$

2. (a) Zij X_1, \dots, X_n een steekproef uit een verdeling met kansdichtheid $f_\theta(x) = \theta x^{\theta-1}$ voor $x \in (0, 1)$ en $f_\theta(x) = 0$ voor $x \notin (0, 1)$, $\theta > 0$ onbekend.
Bepaal de momentenschatting en de meest aannemelijke schatting voor θ .
Bereken de Fisher informatie in één waarneming.
Bepaal een benaderend betrouwbaarheidsinterval voor θ van niveau α .
- (b) Zij X_1, \dots, X_n een steekproef uit een verdeling met kansdichtheid $f_\theta(x) = e^{-(x-\theta)}$ voor $x \geq \theta$ en $f_\theta(x) = 0$ voor $x < \theta$, waarbij $\theta \in \mathbb{R}$ een onbekende parameter is.
Bepaal de momentenschatting T en de meest aannemelijke schatting $\hat{\theta}$ voor θ .
Bepaal de verdeling van $\hat{\theta} - \theta$. Converteert $n(\hat{\theta} - \theta)$ in verdeling?
Welke van de schatters $\hat{\theta} + c$ ($c \in \mathbb{R}$) voor θ verdient de voorkeur (in termen van MSE)? Vergelijk deze schatting met de momentenschatting T .
3. (a) Zij X_1, \dots, X_n een steekproef uit $N(\mu, \mu)$, $\mu > 0$ onbekend. Men wil de nulhypothese $H_0: \mu = 1$ tegen $H_1: \mu > 1$ toetsen bij onbetrouwbaarheidsniveau $\alpha = 0.05$.
Welke toetsen kan je gebruiken voor dit probleem? Omschrijf deze toetsen.
Construeer een toets op grond van toetsingsgrootte $T = n(\bar{X}_n - 1)^2 + (n - 1)S_x^2$.
Beredeneer dat T onder de nulhypothese χ^2 -verdeeld is. Met hoeveel vrijheidsgraden?
Stel $n = 16$, de waargenomen $\bar{x}_n = 1.45$, $s_x^2 = 1.55$. Pas alle bovengenoemde toetsen toe: welke toets verworpt H_0 , welke niet? Bereken tevens de overschrijdingskansen.
- (b) Zij X_1, \dots, X_n een steekproef uit een verdeling met kansdichtheid $f_\theta(x) = \frac{1}{\theta^2} x e^{-x/\theta}$, voor $x \geq 0$ en $f_\theta(x) = 0$ voor $x < 0$, $\theta > 0$ onbekend.
Omschrijf de meest onderscheidende toets van niveau α voor de nulhypothese $H_0: \theta = 1$ tegen hypothese $H_A: \theta = 2$. Laat zien dat deze toets H_0 verworpt als \bar{X}_n groot is.
Bereken de verwachting en de standaardafwijking van \bar{X}_n onder de nulhypothese. Gebruik een normale benadering van \bar{X}_n om de kritieke waarde voor de meest onderscheidende toets op het niveau α te vinden.