MATHEMATISCH INSTITUUT, FACULTEIT WISKUNDE EN INFORMATICA, UU.
IN ELEKTRONISCHE VORM BESCHIKBAAR GEMAAKT DOOR DE $\mathcal{TBC}$ VAN A–ESKWADRAAT.
HET COLLEGE WISB362 WERD IN 2001/2002 GEGEVEN DOOR KARMA DAJANI.

Stochastiek B (WISB362)
19 december 2001

* Zet op elk blaadje dat je inlevert je naam en collegekaartnummer. Zet op het eerste blad ook de naam van je werkcollegebegeleider.

* Als je een onderdeel niet kan oplossen, ga verder met het volgende. Je mag gerust gebruik maken van wat er in de tekst van een onopgelost onderdeel staat. Geef niet alleen antwoorden, maar laat de hele redenering zien die tot het antwoord leidt.

* Punten per opgave:

opgave:	1	2	3	4
punten:	25	25	25	25

Opgave 1

Stel dat de simultane dichtheid van X en Y gegeven wordt door

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-y} & \text{als } 0 \le x \le y, \\ 0 & \text{elders.} \end{cases}$$

a Laat zien dat X exponentieel verdeeld is met parameter $\lambda = 1$.

b Laat zien dat $P(Y \le 2X) = \frac{1}{2}$.

c Laat zien dat $E(Y|X = x) = 1 + x$, en dat $E(Y) = 2$.

d Bepaal $\text{Cov}(X, Y)$.

Opgave 2

Laat X en Y standaard normaal verdeelde stochasten zijn, en laat I een Bernoulli stochast met parameter $0 < p < 1$ zijn (d.w.z. $P(I = 1) = p = 1 - P(I = 0)$). Veronderstel dat I onafhankelijk van X en Y is. Definieer Z door

$$Z = \begin{cases} X & \text{als } I = 1, \\ Y & \text{als } I = 0. \end{cases}$$

a Laat zien dat Z standaard normaal verdeeld is.

b Veronderstel dat X en Y onafhankelijk zijn. Laat zien dat de simultane dichtheid van $X + Y$ en $X - Y$ gegeven wordt door

$$f(z_1, z_2) = \frac{1}{4\pi} e^{-(z_1^2 + z_2^2)/4}.$$

c Bereken de marginale verdelingen van $X - Y$ en $X + Y$. Zijn $X - Y$ en $X + Y$ onafhankelijk?

Opgave 3

Stel dat $X_1, X_2, \ldots$ onafhankelijke en uniform verdeeld op $(0,1)$ zijn. Definieer Y_n en M_n door:

$$Y_n = \min_{1\le i\le n} X_i, \text{ en } M_n = \max_{1\le i\le n} X_i.$$

a Voor $x, y \in \mathbb{R}$, bepaal $P(Y_n \ge x, M_n \le y)$.

b Laat zien dat $nY_n \Rightarrow Z$, waarbij Z exponentieel verdeeld is met parameter $\lambda = 1$.

c Laat zien dat $nM_n - n \Rightarrow W$, waarbij W een stochast is met verdelingsfunctie G gegeven door

$$G(x) = P(W \le x) = \begin{cases} 1 & \text{als } x \ge 0, \\ e^x & \text{als } x < 0. \end{cases}$$

Opgave 4

Stel dat X_n en Y_n onafhankelijk zijn voor $1 \le n \le \infty$, en dat $X_n \Rightarrow X_\infty$ en $Y_n \Rightarrow Y_\infty$.

a Laat zien dat $X_n + Y_n \Rightarrow X_\infty + Y_\infty$.

b Veronderstel nu dat $X_1, X_2, \ldots$ onafhankelijk standaard normaal verdeeld zijn, en laat $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ en $L_n = \sum_{i=1}^n X_i^2$.

(i) Laat zien dat

$$\lim_{n\to\infty} P(S_n \le \sqrt{n}) = P(X_1 \le 1).$$

(ii) Laat zien dat

$$\frac{L_n - n}{\sqrt{2n}} \Rightarrow X_1.$$