MATHEMATISCH INSTITUUT, FACULTEIT WISKUNDE EN INFORMATICA, UU.
IN ELEKTRONISCHE VORM BESCHIKBAAR GEMAAKT DOOR DE $\mathcal{TBC}$ VAN A–ESKWADRAAT.
HET COLLEGE WISB362 WERD IN 2000/2001 GEGEVEN DOOR RONALD MEESTER.

Stochastiek B (WISB362)
20 december 2000, 9.00 - 12.00 uur

(1) (a) Laat zien dat voor elke stochastische grootheid X en elke $\epsilon > 0$, er een positieve constante a bestaat zodanig dat $P(X \leq -a) < \epsilon$, en $P(X \geq a) > 1 - \epsilon$.
(b) Laat zien dat voor elke rij stochastische grootheden $X_1, X_2, \ldots$ er een rij positieve constantes $a_n, n = 1, 2, \ldots$ bestaat zodanig dat

$$a_n X_n \Rightarrow 0,$$

voor $n \to \infty$.
(c) Bepaal een rijtje $a_n, n = 1, 2, \ldots$ met bovenstaande eigenschap in het geval dat X_n uniform verdeeld is op $(0, n)$.

(2) De stochastische grootheden U en Z zijn onafhankelijk en exponentieel verdeeld met ongelijke parameters λ en μ. Verder is $W = U + Z$.
(a) Bepaal de conditionele verdeling van U gegeven W.
(b) Bepaal de conditionele verwachting van W gegeven $U = u$

(3) We beschouwen een vertakkingsproces waarbij het aantal nakomelingen binomiaal verdeeld is met parameters 10 en p. De uitsterfkans van dit proces noemen we $u(p)$.
(a) Laat zien dat $u(p) = 1$ als $p \leq 1/10$.
(b) Laat zien dat de genererende functie van het aantal nakomelingen in de eerste generatie gegeven wordt door

$$G(s) = (1 - p + ps)^{10}.$$

(c) Laat zien dat $\lim_{p \to 1} u(p) = 0$.

(4) De stochastische grootheden $X_1, X_2, \ldots,$ zijn allemaal Poisson verdeeld, waarbij X_n parameter n heeft, $n = 1, 2, \ldots$
(a) Laat zien dat de karakteristieke functie van X_n gegeven wordt door

$$\phi_n(t) = e^{n(e^{it}-1)}.$$

(b) Laat zien dat de karakteristieke functie van $(X_n - n)/\sqrt{n}$ gegeven wordt door

$$\psi_n(t) = e^{ne^{it/\sqrt{n}}-n-it\sqrt{n}}.$$

(c) Laat m.b.v. (b) zien dat $(X_n - n)/\sqrt{n}$ in verdeling naar een standaard normaal verdeelde stochastische grootheid convergeert voor $n \to \infty$. (Hint: ontwikkel de e-macht in de exponent.)