Mathematisch Instituut, Faculteit Wiskunde en Informatica, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de $\mathcal{TBC}$ van A–Eskwadraat.
Het college WISB362 werd in 2000/2001 gegeven door Ronald Meester.

Stochastiek A (WISB362)
25 oktober 2000, 9.00 - 12.00 uur

(1) Je wilt een enquête houden onder een groep mensen om er achter te komen hoeveel mensen zwart bijverdienen. Hiertoe stel je iedereen de vraag: 'verdient u zwart bij?' Aangezien veel mensen hier liever niet de waarheid spreken, gebruik je de volgende procedure. De ondervraagde persoon gooit met een zuivere munt (zonder dat jij het ziet). Als kop boven komt antwoordt hij met 'ja', als munt boven komt spreekt hij de waarheid. Stel dat de kans dat een persoon zwart werkt gelijk is aan q. Als je n personen ondervraagt, geven we het aantal mensen dat 'ja' antwoordt aan met S_n.
(a) Wat is de kans dat iemand de vraag met 'ja' zal beantwoorden?
(b) Wat zegt de zwakke wet van de grote aantallen over S_n/n?
(c) Stel dat $n = 1000$, en dat 668 mensen de vraag met 'ja' hebben beantwoord. Geef op grond van deze gegevens een schatting van q en motiveer je antwoord.
(d) Zegt de wet van de grote aantallen iets over hoe goed de schatting in (c) is?

(2) De stochastische grootheden X en Y zijn onafhankelijk en geometrisch verdeeld met parameter p:
$$P(X = k) = P(Y = k) = p(1-p)^{k-1}; k = 1, 2, \ldots$$
Het minimum van X en Y geven we aan met Z, dus $Z = \min\{X, Y\}$.
(a) Laat zien dat Z geometrisch verdeeld is met parameter $p(2-p)$.
(b) Laat zien dat de conditionele verdeling van X gegeven $Z = k$ gegeven wordt door
$$f_{X|Z}(n|k) = \begin{cases} \frac{1}{2-p}, & n = k, \\ \frac{p}{2-p}(1-p)^{n-k}, & n > k. \end{cases}$$
(c) Bepaal de conditionele verwachting van X gegeven $Z = k$.

(3) De simultane dichtheid van X en Y wordt gegeven door

$$f(x, y) = ce^{-(x^2-2xy+2y^2)},$$

voor alle x en y.
(a) Laat zien dat $c = 1/\pi$.
(b) Laat zien dat de marginale verdelingen van X en Y gegeven worden door respectievelijk een $N(0, 1)$ en een $N(0, 1/2)$ verdeling.
(c) Bepaal de verwachting van $X + Y$.
(d) Zijn X en Y onafhankelijk? Motiveer.

(4) Stel X is een continue stochastische grootheid waarvan de dichtheid f voldoet aan $f(x) = 0$, voor $x > 0$. De verdelingsfunctie van X noteren we met F. Bewijs dat

$$E(X) = -\int_{-\infty}^{0} F(x)dx.$$