MATHEMATISCH INSTITUUT, FACULTEIT WISKUNDE EN INFORMATICA, UU.
IN ELEKTRONISCHE VORM BESCHIKBAAR GEMAAKT DOOR DE $\mathcal{TBC}$ VAN A–ESKWADRAAT.
HET COLLEGE WISB362 WERD IN 2000/2001 GEGEVEN DOOR RONALD MEESTER.

Stochastiek A (WISB362)
4 januari 2001, 9.00 - 12.00 uur

(1) We gooien herhaaldelijk met een munt, waarvan de kans op kop gelijk is aan p en de kans op munt gelijk aan $1-p$. De worpen zijn onafhankelijk van elkaar. Zij nu X het aantal worpen tot en met de eerste kop, en Y het aantal worpen tot en met de eerste munt.
(a) Laat zien dat X geometrisch verdeeld is met parameter p, en dat Y geometrisch verdeeld is met parameter $1-p$.
(b) Bepaal de gezamelijke verdeling van X en Y.
(c) Bepaal $E(X+Y)$.
(d) Bepaal $E(X|Y)$.

(2) We definiëren een rij onafhankelijke stochastische grootheden $X_1, X_2, \ldots$ als volgt:

$$P(X_n = 1) = 1 - \frac{1}{n^2},\ P(X_n = 1 - n^2) = \frac{1}{n^2}.$$

(a) Laat zien dat $E(X_n) = 0$ voor alle n.
(b) Laat zien dat

$$E\left(\sum_{n=1}^{k} X_n\right) = 0.$$

We gaan nu een reeks spelletjes spelen waarbij de stochastische grootheid X_n mijn winst in het n-de spelletje voorstelt. (Een negatieve winst betekent uiteraard verlies.) Uit (b) blijkt dat mijn verwachte totale winst na k spelletjes gelijk is aan 0; het is dus een eerlijk spel. We definiëren nu A_n als de gebeurtenis dat ik in het n-de spelletje verlies, dus $A_n = \{X_n \leq 0\}$.
(c) Laat zien dat

$$P(\cup_{n>N} A_n) \to 0,$$

als $N \to \infty$. (Hint: de gevraagde kans is ten hoogste $\sum_{n=N}^{\infty} P(A_n)$.)
(d) Laat m.b.v. (c) zien dat

$$P(\cap_{n>N}\{X_n = 1\}) \to 1,$$

als $N \to \infty$.

(3) De stochastische grootheden X en Y hebben simultane dichtheid

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \frac{c}{y} e^{-y-(x/y)},$$

voor $0 < x, y < \infty$, en dichtheid 0 elders.
(a) Laat zien dat de constante c gelijk aan 1 moet zijn.
(b) Laat zien dat Y een exponentiële verdeling heeft.
(c) Zijn X en Y onafhankelijk? Motiveer je antwoord.

(4) Laat X een continue stochastische grootheid zijn waarvoor $E(|X|)$ bestaat.
(a) Laat zien dat voor elke $\epsilon > 0$ geldt dat

$$E(|X|) \geq \epsilon P(|X| \geq \epsilon).$$

(b) Laat m.b.v. (a) zien dat $P(|X| = 0) = 1$ als $E(|X|) = 0$.