[12pt]report
amssymb,uusol amsfonts latexsym

Universiteit Utrecht 35 pt Boedapestlaan 6
Mathematisch Instituut 3584 CD Utrecht

Hertentamen – Stochastiek A, donderdag 3 januari 2002

*Zet op elk blaadje dat je inlevert je naam en collegekaartnummer. Zet op het eerste blad ook de naam van je werkcollegebegeleider.

*Als je een onderdeel niet kan oplossen, ga verder met het volgende. Je mag gerust gebruik maken van wat er in de tekst van een onopgelost onderdeel staat. Geef niet alleen antwoorden, maar laat de hele redenering zien die tot het antwoord leidt.

*Punten per opgave: opgave: 1 2 3 4
punten:25252525

In een vaas zitten 5 rode ballen en 2 zwarte. Ik trek willekeurig één van de ballen. Als het een rood bal is gooi ik hem weg, maar als het een zwart is stop ik hem weer terug in de vaas. Zij X_i het aantal rode ballen in de vaas na de i^{de} trekking.

(a) Bepaal $P(X_2 = j)$ voor $j = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.
(b) Bepaal $E(X_2)$.
(c) Bepaal $P(X_5 = 0)$.
(d) Bepaal $P(X_4 = 1|X_5 = 0)$.

Een mijnwerker zit gevangen in een ondergrondse ruimte met drie deuren. De eerste deur brengt hem naar een tunnel, die hem na 2 uur lopen in vrijheid brengt. De tweede deur brengt hem naar een tunnel, die hem na drie uur kruipen terugbrengt naar de ondergrondse ruimte waar zijn tocht begon. De derde deur brengt hem naar een tunnel die hem na een wandeling van vijf uur terugbrengt naar zijn uitgangspunt. Omdat alles in het stikdonker gebeurt, zal de mijnwerker elke keer als hij uit de drie deuren moet kiezen, een deur geheel willekeurig kiezen (dus met kans 1/3, onafhankelijk van eerdere keuzes).

Laat X het aantal uren zijn, dat de mijnwerker nodig heeft om vrij te komen, en laat X_i de tijd nodig voor de $i$de poging om in vrijheid te komen. Zij verder N de poging waarop deur 1 voor het eerst is gekozen (deur 1 is de deur die de mijnwerker in vrijheid zal brengen). Er geldt dan dat

$$X = \sum_{i=1}^{N} X_i.$$

(a) Laat zien zien dat

$$E(X_i|N = n) = \begin{cases} 4\text{als } 1 \leq i \leq n-1 \\ 2\text{als } i = n. \end{cases}$$

(b) Toon aan dat

$$E(X|N = n) = 4n - 2.$$

(c) Laat zien dat N geometrisch verdeeld is, en bepaal de parameter.
(d) Bepaal de verwachting $E(X)$ van X.

Laat $X_1, X_2, \dots$ een rij onafhankelijke Bernoulli stochasten zijn, elk met parameter $p = \frac{1}{2}$. Definieer voor $i = 1, 2, \dots$ de stochasten Y_i door

$$Y_i = 2X_i - 1,$$

en laat $Z_0 = 0$ en

$$Z_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i, \qquad \text{voor } n \geq 1.$$

(a) Laat zien dat $Z_0, Z_1, Z_2, \dots$ een symmetrische stochastische wandeling is.
(b) Bepaal $P(Z_8 = 2)$.
(c) Bepaal $P(Z_5 = 1, Z_i \neq 0, 1 \leq i \leq 4)$.
(d) Toon aan dat

$$P\left(\left|\frac{Z_n}{n}\right| > \frac{1}{2}\right) \leq \frac{4}{n}.$$

Laat X een stochast zijn met genererende functie

$$G_X(s) = \frac{sp}{1 - s(1-p)} \qquad \text{met } 0 < p < 1.$$

(a) Laat zien dat $P(X = 1) = p$ en $E(X) = \frac{1}{p}$.
(b) Bepaal de variantie $\sigma^2(X)$ van X.
(c) Veronderstel dat Y een stochast is met

$$P(Y = 1|X = 1) = \frac{1}{3} = 1 - P(Y = 2|X = 1)$$

en

$$P(Y = 1|X \neq 1) = \frac{1}{2} = P(Y = 2|X \neq 1).$$

Laat zien dat de genererende functie G_Y van Y gegeven wordt door