Uitwerking van Opgave 1

Opgave 1 Veronderstel dat α de kans is dat van een tweeling beide kinderen jongens zijn, en dat β de kans is dat ze allebei meisje zijn. Veronderstel verder, dat als een tweeling uit een jongen en een meisje bestaat, de kans dat het eerst geboren kind een meisje is, $\frac{1}{2}$ is.

(a) Wat is de kans dat de tweeling van hetzeldfde geslacht is?

Uitwerking (a) We schrijven A voor de gebeurtenis dat een tweeling uit twee jongens bestaat, B voor de gebeurtenis dat een tweeling uit twee meisjes bestaat, en C voor de gebeurtenis dat het eerstgeboren kind een meisje is.

Omdat $A \cap B = \emptyset$, geldt dat $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \alpha + \beta$.

(b) Toon aan dat de kans dat het eerste geboren kind van een tweeling een jongen is, gelijk is aan $\frac{1+\alpha-\beta}{2}$.

Uitwerking (b)

$$P(C^c) = P(C^c|A)P(A) + P(C^c|B)P(B) + P(C^c|(A \cup B)^c)P((A \cup B)^c).$$

Nu is $P((A \cup B)^c) = 1 - \alpha - \beta$ en we vinden dat $P(C^c) = 1 \cdot \alpha + 0 \cdot \beta + \frac{1}{2}(1 - \alpha - \beta) = \frac{1+\alpha-\beta}{2}$.

(c) Als het eerst geboren kind een jongen is, wat is dan de kans dat het tweede kind eveneens een jongen is?

Uitwerking (c) $P(A|C^c) = \frac{P(A \cap C^c)}{P(C^c)} = \frac{P(A)}{P(C^c)} = \frac{2\alpha}{1-\alpha-\beta}$.

Uitwerking van Opgave 2

Opgave 2 Er word herhaaldelijk geworpen met een dobbelsteen. Laat
X = het aantal worpen tot een met voor het eerste een 6 bovenkomt, en
Y = het aantal worpen tot een met voor het eerste een 5 bovenkomt.

(a) Zijn X and Y onafhankelijk?

Uitwerking (a) X en Y zijn niet onafhankelijk. Er geldt bijvoorbeeld dat $P(X = 1, Y = 1) = 0 \neq P(X = 1)P(Y = 1) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}$.

(b) Bepaal $E(X + Y)$.

Uitwerking (b) Merk op dat X en Y geometrisch verdeeld zijn met parameter $\frac{1}{6}$, dat wil zeggen dat $P(X = k) = P(Y = k) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \frac{1}{6}$, for $k \in \{1, 2, 3, \ldots\}$. Toelichting: om bij de $k$de worp voor het eerst zes te hebben moet je de eerste $k - 1$ worpen geen zes gooien en bij de $k$de worp wel.
Nu geldt wegens de lineariteit van de verwachting en het feit dat X en Y dezelfde verdeling hebben dat

$$\begin{aligned} E(X+Y) &= E(X) + E(Y) = 2E(X) \\ &= 2\sum_{k=1}^{\infty} k \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \\ &= 2\frac{\frac{1}{6}}{(1-\frac{5}{6})^2} = 12. \end{aligned}$$

(c) Bepaal $P(X = n, Y = m)$ voor alle $n, m \geq 1$.
Uitwerking (c) Als $n = m$, $P(X = n, Y = m) = 0$, je kunt niet tegelijk voor het eerst vijf en voor het eerst zes gooien.
Als $n < m$, treedt $X = n, Y = m$ op als bij de eerste $n-1$ worpen 1,2,3 of 4 wordt gegooid, bij de $n$de worp 6, van de $n+1$ste tot en met de $m-1$ste 1,2,3,4, of 6 en bij de $m$de worp 5. We vinden $P(X = n, Y = m) = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-m-1} \cdot \frac{1}{6}$, als $n < m$.
Op dezelfde manier vinden we dat $P(X = n, Y = m) = \left(\frac{2}{3}\right)^{m-1} \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{m-n-1} \cdot \frac{1}{6}$, als $n > m$.

(d) Bepaal $E(X|Y = 1)$.
Uitwerking (d) We merken eerst op dat $P(X = 1|Y = 1) = 0$ en dat voor $x \geq 2$,

$$\begin{aligned} P(X = x|Y = 1) &= \frac{P(X = x, Y = 1)}{P(Y = 1)} \\ &= \frac{\left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^{x-2}}{\frac{1}{6}} \\ &= \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{x-2}. \end{aligned}$$

Vervolgens berekenen we

$$\begin{aligned} E(X|Y = 1) &= \sum_{x=2}^{\infty} x \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{x-2} \\ &= \frac{1}{6}\frac{5}{6}\sum_{x=2}^{\infty} x \left(\frac{5}{6}\right)^{x-1} \\ &= \frac{1}{5}\left(\frac{1}{(1-\frac{5}{6})^2} - 1\right) \\ &= 7. \end{aligned}$$

Uitwerking van Opgave 3
Opgave 3 In een vaas zit een rode en een blauwe bal. Trek n keer met teruglegging een bal uit de vaas. Voor $1 \leq k \leq n$, laat X_k het totaal aantal getrokken rode ballen zijn na k trekkingen, en laat Y_k het totaal aantal getrokken blauwe ballen zijn na k trekkingen. Verder laat $Z_k = X_k - Y_k$.

(a) Laat zien dat $Z_1, Z_2, \ldots$ een symmetrische stochastische wandeling is.
Uitwerking (a) Voor $1 \leq k \leq n$, laat

$$I_k = \begin{cases} 1 & \text{als de rode bal getrokken is op de } k\text{de trekking} \\ -1 & \text{als de blauwe bal getrokken is op de } k\text{de trekking} \end{cases}$$

Trekkingen zijn onafhankelijk. Er volgt dat de I_k's onafhankelijk zijn. De kans dat je de rode bal pakt is het zelfde als de kans dat je de blauwe pakt. Er volgt dat

$$\begin{aligned} P\left(I_k = 1\right) &= 1/2 \\ P\left(I_k = -1\right) &= 1/2. \end{aligned}$$

Merk op dat $Z_j = \sum_{k=1}^{j} I_k$. Z_j is dus een stochastische wandeling.

(b) Bepaal de kans $P\left(Z_{10} = 4\right)$.

Uitwerking (b) Volgens Stelling 3.1.1 van het dictaat is

$$P\left(Z_{10} = 4\right) = \binom{10}{\frac{1}{2}(10+4-0)} 2^{-10} = \binom{10}{7} 2^{-10}.$$

(c) Stel dat n even is. Bepaal dan de kans $P\left(X_k > Y_k, 1 \le k \le n-1, X_n = Y_n\right)$.

Uitwerking (c) Omdat $Z_k = X_k - Y_k$, volgt

$$\begin{aligned} P\left(X_k > Y_k, 1 \le k \le n-1, X_n = Y_n\right) &= P\left(Z_k > 0, 1 \le k \le n-1, Z_n = 0\right) \\ &= P\left(Z_k > 0, 1 \le k \le n-1, Z_{n-1} = 1, I_n = -1\right) \\ &= P\left(Z_k > 0, 1 \le k \le n-1, Z_{n-1} = 1\right) P\left(I_n = -1\right) \\ &= \frac{1}{2} P\left(Z_k > 0, 1 \le k \le n-1, Z_{n-1} = 1\right) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\text{aantal paden vanaf } (0,0) \text{ naar } (n-1,1) \text{die het } x\text{-axis niet bezoeken}}{\text{aantal paden vanaf } (0,0) \text{ naar } (n-1,1)}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\frac{1}{n-1}\binom{n-1}{\frac{1}{2}(n-1+1+0)}}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^n(n-1)} \binom{n-1}{\frac{n}{2}}$$

waarin de laaste regels uit de Ballot Stelling (3.1.8) volgen.

(d) Laat zien dat voor alle $\epsilon > 0$ geldt dat

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\left|\frac{Z_n}{n}\right| > \epsilon\right) = 0$$

Uitwerking (d) Let op dat $E\left(I_k\right) = 0$, $\sigma^2(I_k) = 1$ en dat $\frac{Z_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} I_k$. Alle I_ks zijn gelijk verdeeld en onafhankelijk van elkaar, dus kunnen we de zwakke wet van grote aantallen (Stelling 4.1.4) toepassen om de resultaat te krijgen.

Uitwerking van Opgave 4

Opgave 4 Laat $X_1, X_2, \ldots$ een rij van onafhankelijke stochasten zijn, met genererende functie $G_{X_i} = \frac{1}{4}(s + s^2 + s^4 + s^5)$, voor $i = 1, 2, \ldots$ Laat N een Binomiaal verdeelde stochast zijn met parameters m en p (d.w.z. $P\left(N = n\right) = \binom{m}{n} p^n (1-p)^{m-n}$ voor $n = 0, 1, \ldots, m$). Veronderstel verder dat N onafhankelijk van $X_1, X_2, \ldots$ is. Laat $Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_N$.

(a) Laat zien dat voor $n = 0, 1, 2, \ldots, m$ en alle s,

$$E\left(s^Y | N = n\right) = \frac{1}{4^n}(s + s^2 + s^4 + s^5)^n$$

Uitwerking (a) Volgens de definitie van Y,

$$\begin{aligned} E\left(s^Y|N=n\right) &= E\left(s^{X_1+X_2+\ldots+X_N}|N=n\right) \\ &= E\left(s^{X_1+X_2+\ldots+X_n}|N=n\right) \\ &= E\left(s^{X_1+X_2+\ldots+X_n}\right) \end{aligned}$$

waar de laatste regel volgt uit de onafhankelijkheid van de X_is en N.

Vervolgens geldt dat

$$\begin{aligned} E\left(s^{X_1+X_2+\ldots+X_n}\right) &= E\left(s^{X_1}s^{X_2}\ldots s^{X_n}\right) \\ &= E\left(s^{X_1}\right)E\left(s^{X_2}\right)\ldots E\left(s^{X_n}\right), \end{aligned}$$

wegens de onafhankelijkheid van de X_is. Volgens de definitie van een genererende functie is $E\left(s^{X_i}\right) = G_{X_i}(s)$. Dus is

$$\begin{aligned} E\left(s^Y|N=n\right) &= G_{X_1}(s)G_{X_2}(s)\ldots G_{X_n}(s) \\ &= \left(\frac{1}{4}(s+s^2+s^4+s^5)\right)^n. \end{aligned}$$

(b) Bepaal (met behulp van onderdeel (a)) $P(Y=5|N=3)$

Uitwerking (b) Volgens de definitie van de genererende functie is

$$G_{Y|N=n}(s) = E\left(s^Y|N=n\right) = \sum_i P\left(Y=i|N=n\right)s^i.$$

Dus zien we dat

$$\left(\frac{1}{4}(s+s^2+s^4+s^5)\right)^3 = \sum_i P\left(Y=i|N=3\right)s^i.$$

Er volgt dat $P(Y=5|N=3)$ de coëfficient van s^5 in

$$\left(\frac{1}{4}(s+s^2+s^4+s^5)\right)^3.$$

We rekenen dit uit:

$$\left(\frac{1}{4}(s+s^2+s^4+s^5)\right)^3 = \frac{1}{4^3}(s^3+3s^4+3s^5+\ldots)$$

en vinden dat $P(Y=5|N=3) = \frac{3}{4^3}$.

(c) Laat zien (m.b.v. (a)) dat de genererende functie van Y gegeven wordt door

$$G_Y(s) = \left(\frac{1}{4}(s+s^2+s^4+s^5)p+1-p\right)^m$$

Uitwerking (c) We weten,

$$
\begin{aligned}
G_Y(s) &= E\left(s^Y\right) \\
&= \sum_{n=0}^{m} E\left(s^Y|N=n\right) P\left(N=n\right) \\
&= \sum_{n=0}^{m} \left(\frac{1}{4}(s+s^2+s^4+s^5)\right)^n \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} p^n(1-p)^{m-n} \\
&= \sum_{n=0}^{m} \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} \left(\frac{1}{4}(s+s^2+s^4+s^5)p\right)^n (1-p)^{m-n} \\
&= \left(\frac{1}{4}(s+s^2+s^4+s^5)p+1-p\right)^m,
\end{aligned}
$$

waar de laaste som volgt uit de binomium van Newton.
(d) Bepaal de verwachting $E\left(Y\right)$ en variantie $\sigma^2(Y)$ van Y.
Uitwerking (d) M.b.v. de genererende functie van Y, vinden we dat

$$E\left(Y\right) = G_y^{'}(1) = 3mp$$

$$\sigma^2(Y) = G_Y^{''}(1) + G_Y^{'}(1) - G_Y^{'}(1)^2 = \frac{23}{2}mp - 9mp^2.$$