Mathematisch Instituut, Faculteit Wiskunde en Informatica, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de $\mathcal{TBC}$ van A–Eskwadraat.
Het college WISB362 werd in 2000/2001 gegeven door Ronald Meester.

Stochastiek B (WISB362)
8 maart 2001, 9.00 - 12.00 uur

(1) Stel de stochastische grootheden $X_1, \ldots, X_n$ zijn onafhankelijk en uniform verdeeld op $(0, 1)$. We definiëren $Y_n = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$.
(a) Laat zien dat de dichtheid van Y_n gegeven wordt door

$$f(x) = n(1-x)^{n-1},$$

voor $x \in (0, 1)$, en $f(x) = 0$ anders.
(b) Laat zien dat $E(Y_n) = (n+1)^{-1}$.
(c) Laat zien dat nY_n in verdeling convergeert naar een exponentiële verdeling met parameter 1, voor $n \to \infty$. (Hint: bekijk hiertoe $P(nY_n > t)$.)

(2) De stochastische vector (X, Y) heeft simultane dichtheid

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{(1+x^2+y^2)^3}},$$

voor alle $x, y \in \mathbb{R}$.
(a) Laat zien dat dit inderdaad een dichtheid is. Hierbij kun je gebruik maken van het feit dat de primitieve (naar y) van $(1 + x^2 + y^2)^{-3/2}$ gegeven wordt door

$$\frac{y}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2+y^2}}.$$

(b) Bepaal de marginale verdelingen van X en Y.
(c) Bepaal de conditionele verdeling van Y gegeven X.
(d) Bereken $E(Y|X)$.

(3) We gooien herhaaldelijk met een munt, waarbij de kans op kop gelijk is aan p. Laat X het aantal worpen zijn tot en met de eerste kop.
(a) Laat zien dat $P(X = k) = (1-p)^{k-1}p$, voor $k = 1, 2, \ldots$
(b) Laat zien dat de karakteristieke functie van X gegeven wordt door

$$\phi_X(t) = \frac{pe^{it}}{1-(1-p)e^{it}}.$$

(c) Laat zien dat als $p \downarrow 0$, pX in verdeling naar een standaard exponentiële verdeling convergeert. Je kunt hierbij gebruik maken van het feit dat de karakteristieke functie van deze exponentiële verdeling gegeven wordt door $\phi(t) = (1 - it)^{-1}$. (Hint: ontwikkel de e-macht.)

(4) Beschouw het polynoom

$$H(s) = s^2 - 2Xs + Y,$$

waarbij X en Y onafhankelijke stochastische grootheden zijn met een exponentiële verdeling met parameter 1.
(a) Bepaal de kans dat de vergelijking $H(s) = 0$ ten minste één reële oplossing heeft.
(b) Wat is de kans dat $H(s) = 0$ precies één reële oplossing heeft?
(c) Bepaal het verwachte aantal reële oplossingen van $H(s) = 0$.