Universiteit Utrecht
Betafaculteit

Examen Discrete Wiskunde op dinsdag 25 juni 2013, 9.30-12.30 uur.

- De opgaven dienen duidelijk uitgewerkt te zijn en netjes ingeleverd te worden. Schrijf op elk ingeleverd vel uw naam en studentnummer.
- Het examen omvat tien opgaven met in totaal 14 (deel)opgaven.
- De maximale score bedraagt:
  - 2 punten voor: 1a, 4a, 4b.
  - 3 punten voor: 1b, 1c, 3b. /2
  - 4 punten voor: 1d, 3a, 4c, 4d, 7. /2 /2 /2
  - 5 punten voor: 2, 5, 6. /2

2+2+2 + 3 + 1 + 2 + 4 + 2 + 2
+ 5 + 2 + 1

- In totaal kunnen er 50 punten worden gescoord. Het cijfer kan worden bepaald door te delen door 5.
- Een rekenmachine is niet nodig en derhalve verboden. Eventuele rekenfouten worden niet bestraft, tenzij het de spuigaten uitloopt (dit ter beoordeling van de nakijker).

Succes!

==

Opgave 1.
'Er was eens een molenaar, die leefde in een land dat bezet was door ...'. Na het beginverhaal dat is weggelaten om het tentamen wat korter te maken komt dan hier de essentiële informatie. Gegeven is een windmolen met acht wieken. Door aan de wieken gekleurde vlaggen (rood, geel, blauw, wit) te hangen (eentje per wiek) kunnen signalen worden overgebracht. Om geen argwaan te wekken kan de molenaar de wieken niet vastzetten. We zijn geïnteresseerd in het aantal mogelijke verschillende signalen dat kan worden overgebracht.

(a) Geef de verschillende permutaties (denk eraan dat je ze bij (b) ook nog nodig hebt).

(b) Gegeven de gewichten $w(rood) = r$, $w(geel) = g$, $w(blauw) = b$ en $w(wit) = w$, bepaal de pattern inventory. U mag hierbij uiteraard machten van $(b + g + r + w)$, enz. laten staan.

(c) De plaatselijke commandant, die een beetje ijdel is, vaardigt een verordening uit dat ter ere van hemzelf op iedere dag precies drie gele vlaggen en minstens één blauwe vlag moeten wapperen, en dat wit wordt verboden. Bereken het aantal verschillende, onderscheidbare signalen dat nu nog kan worden overgebracht.

Wanneer u (b) niet hebt kunnen bepalen, dan kunt u hier nog punten scoren door aan te geven hoe u dit aantal had kunnen bepalen wanneer u de pattern inventory wel had kunnen uitrekenen. Het enumereren van de equivalentieklassen kost alleen tijd, en u krijgt er geen punten voor.

(d) Stel dat bij (c) als extra voorwaarde zou zijn gesteld dat de drie gele vlaggen direct naast elkaar moeten hangen; verder moet er weer minstens één blauwe vlag wapperen, en mogen er geen witte vlaggen worden geplaatst. Geef aan hoe u deze variant zou kunnen uitrekenenen. U hoeft alleen aan te geven hoe u het aan zou pakken; u hoeft het niet uit te rekenenen (mag wel, maar het levert niets extra op).

Opgave 2.
Beschouw het hieronder gegeven netwerk. De getallen bij de pijlen geven respectievelijk de waarde van de huidige stroom door die pijl en de capaciteit van die pijl aan. Bepaal de maximale stroom door dit netwerk en bewijs de maximaliteit van deze stroom met behulp van een minimale snede. **Geef alle stappen van uw berekening duidelijk aan, inclusief residuele graaf. Het uitsluitend vermelden van de oplossing wordt niet goedgerekend.**

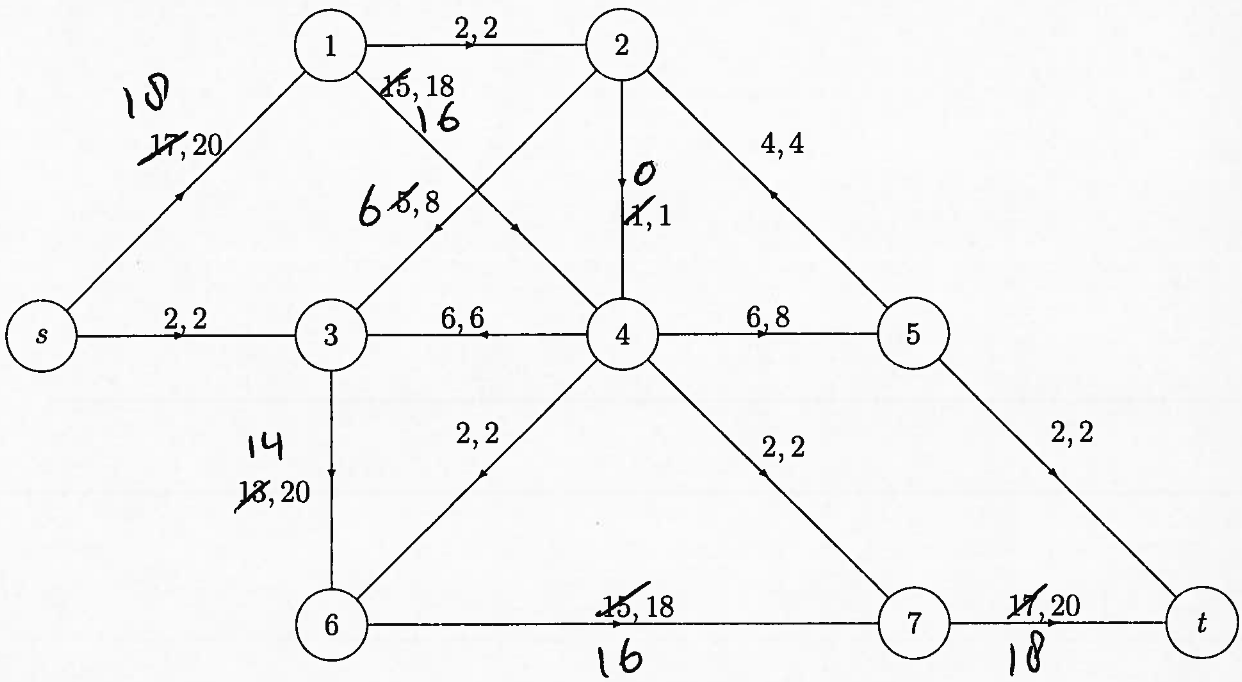

Figure 1: Netwerk

Opgave 3.
Gegeven is een ongerichte, volledige graaf $G = (V, E)$; voor iedere kant $e \in E$ is de lengte $l(e)$ bekend. Het doel is een deelverzameling $E' \subset E$ van de kanten te vinden met minimale totale lengte zodanig dat de graaf $G' = (V, E')$ volledig verbonden is.

(a) Stel dat voor alle $e \in E$ geldt dat $l(e) \geq 0$. Formuleer een algoritme om E' te bepalen, en bewijs de correctheid van dit algoritme.

(b) Stel dat voor sommige $e \in E$ geldt dat $l(e) < 0$. Formuleer een algoritme om E' te bepalen; u hoeft de correctheid van dit algoritme niet te bewijzen.

Opgave 4.
Er is werk aan de winkel. In dit geval zijn er n taken die moeten worden uitgevoerd door twee personen: Koos en Toos. Zowel Koos als Toos hebben hun specialiteit, en de taken die daaronder vallen moeten door de betreffende persoon worden gedaan; de overige taken willen ze zo verdelen dat het verschil in hun totale werktijd zo klein mogelijk is (uiteraard in absolute waarde). Noem dit probleem WERK VERDELEN. Van iedere taak T_i $(i = 1, \ldots, n)$ is de bewerkingsduur p_i (neem aan dat dit een niet-negatief geheel getal is) bekend en door wie deze mag worden uitgevoerd (Koos, Toos, of beide).

(a) Formueer de beslissingsvariant van het probleem WERK VERDELEN.

(b) Laat zien dat de beslissingsvariant van het probleem WERK VERDELEN tot de klasse $\mathcal{NP}$ behoort. U mag er hierbij van uitgaan dat de inputgrootte gelijk is aan $O(n \log p_{\max})$, waarbij $p_{\max}$ de grootste bewerkingsduur uit de instantie is.

(c) Toon aan dat het de beslissingsvariant van het probleem WERK VERDELEN $\mathcal{NP}$-volledig. U moet hierbij gebruiken dat het probleem PARTITIE $\mathcal{NP}$-volledig is. Formuleer de reductie en bewijs de correctheid ervan; u hoeft niet te bewijzen dat de reductie polynomiaal is. Het probleem PARTITIE is als volgt gedefinieerd: gegeven t niet-negatieve gehele getallen $a_1, \ldots, a_t$, bestaat er een deelverzameling S van de indexverzameling $\{1, \ldots, t\}$ waarvoor geldt

$$\sum_{j \in S} a_j = (\sum_{j=1}^{t} a_j)/2?$$

Wanneer u niet in staat bent om deze reductie te geven, dan kunt u nog punten verdienen door het achterliggende idee van een reductie uit te leggen.

(d) Stel dat iemand beweert dat hij een algoritme heeft ontwikkeld dat **voor iedere instantie** van het probleem WERK VERDELEN in polynomiale tijd een toegelaten oplossing vindt die maximaal 10 eenheden boven het optimum zit (dus als het optimum z^* is, dan vindt dit algoritme een oplossing met waarde $\leq z^* + 10$). Welke conclusie kunt u dan trekken? Motiveer uw antwoord.

Opgave 5.
Gegeven is een drukbezette docent, die aan m groepen les moet geven. Voor iedere groep i is het aantal lessen r_i $(i = 1, \ldots, m)$ bekend dat per week gegeven moet worden; iedere les kost 1 uur. De week is verdeeld in p uren, waarbij voor ieder uur bekend is welke groepen dan les kunnen krijgen (de groepen hebben nog meer te doen en zijn dus niet altijd beschikbaar; de docent is altijd beschikbaar). Het doel is een schema te vinden waarin zoveel mogelijk lessen worden gegeven per week. Geef aan hoe je dit probleem als een max flow probleem kunt formuleren. Geef hierbij ook aan hoe je de oplossing van dat max flow probleem kunt vertalen naar een oplossing voor het roosteringsprobleem.

Opgave 6.
Het PYRAMIDALE HANDELSREIZIGERSPROBLEEM is als volgt gedefinieerd: Gegeven is een gerichte graaf $G = (V, A)$, met $V = \{1, \ldots, n\}$. Voor iedere pijl $(i, j) \in A$ is de afstand $l(i, j)$ gegeven. Het doel is het bepalen van een tour van minimale lengte die ieder punt in V precies éénmaal bezoekt; deze tour moet **pyramidaal** zijn. Hierbij geldt dat een tour pyramidaal is indien deze tour de vorm $(1 \rightarrow n \rightarrow 1)$, waarbij in het stuk $1 \rightarrow n$ de tussenliggende punten in oplopende volgorde en in het stuk $n \rightarrow 1$ in dalende volgorde worden bezocht. De tour $(1, 2, 4, 3, 6, 5)$ is niet pyramidaal, want het stuk $1, 2, 4, 3, 6$ staat niet in de goede volgorde; $(1, 3, 6, 5, 4, 2)$ is wel pyramidaal.

Los het PYRAMIDALE HANDELSREIZIGERSPROBLEEM op met behulp van Dynamische Programmering. Gebruik hierbij toestandsvariabelen van de vorm $f(i, j)$, die de lengte aangeven van het kortste pyramidale pad van de vorm $(i \rightarrow 1 \rightarrow j)$. Geef aan hoe u deze initialiseert, welke recurrente betrekking u gebruikt om de correcte waarden van de toestandsvariabelen te bepalen, en hoe u uiteindelijk de waarde van de optimale oplossing en de bijbehorende tour kunt bepalen.

Opgave 7.
In geval van het *gate-assignment probleem* is het de bedoeling om vliegtuigen toe te wijzen aan een gate. Hierbij is voor ieder vliegtuig het interval bekend gedurende welke het een gate nodig heeft en wat voor type gate dat moet zijn. De kwaliteit van een oplossing wordt beoordeeld op basis van de tijd tussen twee opvolgende vliegtuigen die aan dezelfde gate zijn toegewezen; wanneer die tijd t minuten is, dan levert dit een score van $f(t)$ op, waarbij $f(t) = -\infty$ voor $t \leq 15$ en voor $t > 15$ is $f(t)$ een niet-dalende eindige functie. Verder krijg je nog een bonus $b(v)$ voor ieder vliegtuig v dat je aan een gate zet; deze bonus is afhankelijk van het vliegtuig.

Stel dat we een gate hebben van een gegeven type. Laat zien hoe je het maken van de beste toewijzing (dus met **maximale waarde**) aan die gate kunt oplossen als een kortste pad probleem.