**Universiteit Utrecht**
**Betafaculteit**

**Examen Discrete Wiskunde op woensdag 5 maart 2014, 9.30-12.30 uur.**

- De opgaven dienen duidelijk uitgewerkt te zijn en netjes ingeleverd te worden. Schrijf op elk ingeleverd vel uw naam en studentnummer.
- Het examen omvat 12 opgaven met in totaal 14 (deel)opgaven.
- Op de vragen 1, 2, 8a, 8b, 9a kunnen maximaal 3 punten worden gescoord; op alle overige vragen kunnen maximaal 4 punten worden gescoord. Totaal 51 punten. Het cijfer wordt bepaald door door 5 te delen (met een maximum van 10).
- Wanneer gevraagd wordt om een probleem op een bepaalde manier op te lossen, dan wordt iedere andere manier volledig fout gerekend. Enumeratie levert eveneens niets op.
- Een rekenmachine is niet nodig en derhalve verboden. Eventuele rekenfouten worden niet bestraft, tenzij het de spuigaten uitloopt (dit ter beoordeling van de nakijker).
- In principe (dus wanneer ik geen rekenfouten heb gemaakt) zouden er mooie antwoorden (geheeltallig) uit moeten komen. Bij eventuele stelsels vergelijkingen komt het (als het goed is) vaak zo uit dat een variabele de waarde 1 krijgt.

**Succes!**

========================================

**Opgave 1.**
Gegeven is een standaard pak kaarten (van ieder van de vier kleuren Schoppen, Harten, Ruiten en Klaveren zijn er dertien kaarten: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, T, B, V, H, A). Hieruit worden willekeurig 13 kaarten getrokken. Bepaal de kans dat nu worden getrokken: Schoppen AVxxx, Harten BTxx, Ruiten AHxx, en nul Klaveren. Hierbij staat een x voor een willekeurige kaart uit $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$; de kans zelf hoef je niet uit te rekenen.

**Opgave 2.**
Gegeven is een willekeurige permutatie $\pi$ van $n$ elementen. We splitsen de permutatie op in deelcykels. Bereken de kans op een deelcykel van grootte $k$, waarbij $k > n/2$.

**Opgave 3**
Gegeven is een mp3-speler waarop in totaal $n$ liedjes staan, die daar op zijn gezet door verschillende mensen. Smaken verschillen, en ieder liedje is door één van hen gekwalificeerd als 'een bak herrie' (hier zijn er $k$ stuks van) en 'een lust voor het oor' (de overige $n-k$ stuks). De mp3-speler speelt de liedjes in willekeurige volgorde af. Bereken het aantal mogelijke permutaties waarin nooit twee prutliedjes (de bak herrie dus) achter elkaar worden gedraaid. Houd er rekening mee dat je van een liedje alleen kunt horen of het prut of prachtig is; verder zijn ze allemaal onherkenbaar.

**Opgave 4.**
Bepaal het aantal verschillende getallen tussen 1000 en 10.000 die een veelvoud zijn van 60 en die bestaan uit verschillende cijfers. Volledige enumeratie kost tijd en levert niets op.

**Opgave 5**
Gegeven is een kring van $n$ stoelen en een aantal bobo's die op die stoelen kunnen gaan zitten. Een bobo heeft uiteraard een assistent bij zich voor het denkwerk; wanneer de bobo aan tafel zit, dan neemt de assistent altijd naast de bobo plaats (aan de rechterkant uiteraard, want het is de rechterhand van de bobo). Definieer $a_n$ als het aantal mogelijke manieren om de stoelen te vullen. Hierbij mag u er van uit gaan dat een bobo niet onderscheiden kan worden van een andere bobo; het aantal bobo's dat geplaatst wordt mag kleiner zijn dan $\lfloor n/2 \rfloor$; de overige stoelen blijven dan gewoon leeg. Geef een relatie tussen $a_n$ en Fibonacci getallen.

**Opgave 6.**
Bepaal **met behulp van een genererende functie** de kans dat je **ten hoogste** 14 gooit met vier standaard dobbelstenen. Je hoeft deze kans niet uit te rekenen; het gaat er hier vooral om dat je de correcte genererende functie opstelt, zodat je, wanneer je het uit zou werken en de coëfficiënt van $x^{14}$ zou kennen deze kans zou kunnen bepalen.

**Opgave 7.**
In het verre land Wismania hebben ze een bijzonder geldsysteem. Ze hebben 15 verschillende munten, die allemaal een verschillende, geheeltallige waarde hebben met een maximum van 50 Mania. Een man heeft van elke soort precies één munt. De man heeft twee kinderen en wil elk van zijn kinderen precies 2 munten geven. Om ruzie te voorkomen wil de vader er wel voor zorgen dat beide kinderen evenveel Mania's krijgen.

Bewijs dat dit voor iedere mogelijke serie waarden van die 15 munten mogelijk is, of geef een tegenvoorbeeld.

**Opgave 8.**
(a) Uit het binomium van Newton volgt dat

$$3^n = (2+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k}$$

Geef een combinatorisch bewijs van de bovenstaande gelijkheid.

(b) Geef een combinatorisch bewijs voor de onderstaande relatie

$$\binom{n+k}{k} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n-i+k-1}{k-1}$$

**Opgave 9.**
Los de onderstaande recurrente betrekkingen op met de JBF methode (karakteristieke vergelijking, particuliere oplossing, enz.). U mag eerder gevonden resultaten uiteraard hergebruiken. Bij (b) zijn de beginwaarden niet gegeven; hier hoeft u de constanten niet uit te rekenen.

$$(a) \quad a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} \quad \text{voor } n \geq 1 \text{ met } a_0 = 1 \text{ en } a_1 = 4.$$

$$(b) \quad a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} + 2 \cdot 2^n + n \quad \text{voor } n \geq 2 \text{ met } a_0 \text{ en } a_1.$$

**Opgave 10.**
Los de recurrente betrekking van Opgave 9a op met behulp van een genererende functie.

**Opgave 11.**
Los de onderstaande recurrente betrekking op met de sommatie-factor methode

$$(n+2)(n+4)a_n = (n+1)(n+5)a_{n-1} + 2(n+3)(n+4)(n+5) \quad \text{voor } n \geq 1;$$

hierbij geldt $a_0 = 25$. Geef duidelijk aan hoe je de gebruikte factor kunt afleiden (ook al zou je hem met het blote oog direct kunnen zien).

**Opgave 12**
Een citaat uit een willekeurige goedkope avonturenroman.

Het konvooi dat de prinses begeleidde was aangevallen door een horde moordlustige bandieten. Een hevige strijd ontbrandde, waarbij langzaam maar zeker de ridders, die de prinses moesten beschermen, werden uitgeschakeld, totdat uiteindelijk alleen de prinses en haar bedienden nog over waren. De bandieten liepen breed grijnzend op hen af om die ongewapende bedienden om zeep te helpen en de prinses gevangen te nemen. Wat ze niet wisten was dat ieder van de bedienden een kruisboog bij zich had (met helaas maar één pijl) en dat ze daarmee flink hadden geoefend. Verder beschikte de prinses nog over een dodelijk werpmes (waar ze ook goed mee om kon gaan). Toen de bedienden de kruisboog te voorschijn haalden deinsden ze terug, maar toen de roverhoofdman een grote beloning uitloofde voor degene die de prinses gevangen nam, drongen de bandieten op. Daarop schoten alle bedienden tegelijk hun kruisboog af op een willekeurige bandiet; was er maar tijd geweest om het schieten te coördineren ...

Uiteraard loopt het in zo'n verhaal helemaal goed af, maar hoe groot is die kans eigenlijk? Neem aan dat er $n$ bedienden zijn en in totaal $k$ bandieten; bedenk dat de prinses na het salvo nog de beschikking heeft over haar werpmes. Neem verder aan dat iedereen zijn hoofd koel houdt en raak schiet/werpt (en dit schakelt zo'n bandiet volledig uit). Geef aan hoe je die kans kunt berekenen.

# Formules enz.

### Inclusion-Exclusion

Stel dat er in totaal $N$ objecten zijn. Ieder object kan $r$ verschillende eigenschappen, $a_1, \ldots, a_r$, bezitten. Het aantal objecten dat eigenschappen $a_{i_1}, \ldots, a_{i_t}$ bezit (en mogelijk nog andere eigenschappen) wordt genoteerd met $N(a_{i_1}, \ldots, a_{i_t})$; met $s_t = \sum N(a_{i_1}, \ldots, a_{i_t})$ wordt aangegeven dat er wordt gesommeerd over iedere combinatie van $t$ ($t = 0, \ldots, r$) verschillende eigenschappen. Verder geeft $N(a'_1, \ldots, a'_r)$ het aantal van de $N$ objecten aan die geen enkele van de $r$ eigenschappen bezitten. Nu geldt

$$N(a'_1, \ldots, a'_r) = N - s_1 + s_2 + \ldots + (-1)^k s_k$$

Evenzo kun je het aantal elementen met precies $m$ eigenschappen bepalen als

$$e_m = s_m - \binom{m+1}{1} s_{m+1} + \binom{m+2}{2} s_{m+2} + \ldots + (-1)^{r-m} \binom{m+r-m}{r-m} s_r.$$

### Binomium

Het uitgebreide binomium van Newton is gedefinieerd als

$$(1+x)^u = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{u}{r} x^r,$$

waarbij

$$\binom{u}{r} = \begin{cases} \frac{u(u-1)\ldots(u-r+1)}{r!} & \text{als } r > 0 \\ 1 & \text{als } r = 0 \end{cases}$$

Toepassing van de regel levert bijv.

$$\frac{1}{(1-x)^p} = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{r+p-1}{p-1} x^r.$$

Het aantal mogelijkheden om $n$ genummerde ballen te verdelen over $k$ onherkenbare dozen is het Stirling getal $S(n,k)$. Dit is gedefinieerd als

$$S(n,k) = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n$$