Examen DW ~~14-15~~ 13-14. Lars van den Haak.

Opgave 1.

schoppen AVxxx : $\binom{8}{3}$.

Harten : BTxx : $\binom{8}{2}$

Ruiten : AHxx : $\binom{8}{2}$

nul klaver : $1 = \binom{13}{0}$

Dus $P = \dfrac{\binom{8}{3}\cdot\binom{8}{2}\binom{8}{2}\cdot 1}{\binom{52}{13}}$

Zie laatste pagina

Opgave 2.

We hebben n elementen en $k > n/2$.

~ P(cykel van precies grootte k) = $\dfrac{\binom{n}{k}(k-1)!\cdot(n-k)!}{n!}$ want je kiest $\binom{n}{k}$ getallen. Deze getallen moeten een cykel vormen, dat kan op $(k-1)!$ manieren.

Opgave 3. k herrie n-k chille muziek.

je hebt n plekken. je deelt op in paren k paren herrie, chill en n-2k chill.

~~1: het begint met herrie~~,

je hebt n-k plekken over, dus

$\binom{n-k}{k}\binom{n-2k}{n-2k} = \binom{n-k}{k}$, maar dan kan herrie nooit als laatst komen, stel herrie als laatst, ~~daarvoor moet chill~~

n-(k-1)+1 plekken over en k-1 paren dus

of $\cancel{\binom{n-k+1}{k-1}\binom{n-2k}{n-2k}} = \binom{n-k-1}{k-1}$ $\binom{n-k}{k-1}\binom{n-2k+1}{n-2k+1}$.

Dus $\cancel{\binom{n-k}{k} + \binom{n-k-1}{k-1}}$. $\binom{n-k}{k} + \binom{n-k}{k-1}$.

Opgave 4.

Iets is dus 0 mod (60)

dus 0 (mod 6) en 0 (mod 10).

Het moet eindigen op 0. De eerste 3 cijfers moeten mod 6 zijn, dus mod 3 en mod 2.

Dus laatste cijfer is even (2,4,6 of 8) nul is al gebruikt.

met $a,b,c \in \mathbb{N}_{\geq 0}$ ~~m~~ $0<a,b,c<10$.

en $a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c \equiv a+b+c \pmod 3$.

Dus

$a+b+c$; cases:

$a,b=3,9$

- a,b,c zijn $0 \pmod 3$, dus $c=6$. : 2

$a,b=1,7$

- a,b,c zijn $1 \pmod 3$, dus $c=4$. : 2
- a,b,c zijn $2 \pmod 3$, dus $c=2$ of 8. : $2 \cdot 2$.
- a,b,c : 1 $0 \pmod 3$, 1 $1 \pmod 3$, 1 $2 \pmod 3$.
  - $c = 6 = 0 \pmod 3$ $<{3 \cdot 3 \atop 3 \cdot 3}$
  - $c = 4 \equiv 1 \pmod 3$ $<{3 \cdot 3 \atop 3 \cdot 3}$
  - $c = 2 \equiv 8 \equiv 2 \pmod 3$, $<{2 \cdot 3 \cdot 3 \atop 2 \cdot 3 \cdot 3}$.

Dus $2+2+2\cdot 2+4\cdot 3\cdot 3+2\cdot 2\cdot 3\cdot 3$.

$$8+8\cdot 9 = 8\cdot 10 = 80.$$

Opgave 5.

h h h h

We voegen links een stoel toe (a_{n+1}).

- Die stoel blijft leeg: er zijn a_n mogelijkheden om te plaatsen
- Die stoel gaat een bobo zitten, met een assistent er naast. Er blijven $n-1$ stoelen over, waar a_{n-1} mensen kunnen zitten.

Dus $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$.

ofwel $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$.

Opgave 6

voor elke dobbelsteen hebben we $(x+x^2+\dots+x^6)$, dus
$G(x) = (x+x^2+\dots+x^6)^4$.

$$G(x) = \left(\frac{1}{1-x} - \frac{x^7}{1-x} - \frac{1-x}{1-x} \right)^4 = \left(x\frac{(1-x^6)}{1-x} \right)^4$$

$$= x^4 \left(\frac{1-x^6}{1-x} \right)^4$$

en dan de coëfficienten van x^4 t/m x^{14} optellen en dan delen door 6^4, dat is het totaal aantal mogelijkheden.

Opgave 7

We noemen de munten a_1 t/m a_{15}. er geldt
$1 \leq a_1 < a_2 < \ldots < a_{14} < a_{15} \leq 50$.

Noem de rijen

$(a_1 + a_1, a_2 + a_1, \ldots, a_{15} + a_1)$

$(a_1 + a_2, \ldots\ldots, a_{15} + a_2)$.

t/m

$(a_1 + a_{15}, \ldots\ldots, a_{15} + a_{15})$.

Voor elke rij geldt dat ze strikt stijgend zijn en dat $2 \leq a_i + a_j \leq 100$, want $a_i, a_j \leq a_{15} \leq 50$.

Er zijn in totaal $15 \times 15 = 225$ combinaties, maar alle $a_i + a_i$ zitten er 1x in en $a_i + a_j$ zitten er 2x in, namelijk $a_i + a_j = a_j + a_i$.

$a_i + a_i$ kan niet, dus er zijn $\frac{225-15}{2} = \frac{210}{2} = 105$ combinaties die wel geheel verschillend zijn.

Maar tussen 2 en 100 zitten 99 verschillende getallen, dus er moet gelden dat er $a_i + a_j = a_k + a_l$ waar $a_i + a_j$ niet in dezelfde rij zit als $a_k + a_l$, vanwege pidgeon-hole

Verder zijn deze strikt verschillend, stel dat $i = k$, dan

$a_i + a_j = a_k + a_l$

$a_j = a_l$, dus $j = l$ oftewel $a_i + a_j = a_i + a_j$ en die komt maar 1x voor. Dus het kan altijd.

Opgave 8

a) $3^n = (2+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k}$.

Je hebt n verschillende ballen en die kun in 3 kleuren maken.
Dat kan op 3^n manieren.

We kunnen er ook voor kiezen er k alvast in 1 kleur te verfen.
Dat kan op $\binom{n}{k}$ manieren en dan de overige ballen hebben nog 2 keuzes voor kleur.
Dus 2^{n-k} bij elkaar is dit
$\binom{n}{k} 2^{n-k}$
en we kunnen dit voor k=0 t/m n doen, dus

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} = 3^n.$$

b) $\binom{n+k}{k}$ dit is alsof we k dingen kiezen uit n+k dingen.

We kunnen ook van de eerste i dingen niks kiezen en dan die erna zeker wel. Voor elke i kan dit op 1 manier. De overige dingen kunnen we op $\binom{n-i+k-1}{k-1}$ manieren kiezen.
we kunnen maximaal n dingen niet kiezen, dus i loopt van 0 tot n en we hebben

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n-i+k-1}{k-1} = \binom{n+k}{k}.$$

9 a) $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$.

$a_n - 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = 0$.

Dus karakteristieke vergelijking is

$x^2 - 4x + 4 = 0$.

$(x-2)^2 = 0$.

$x = 2$. dit is een meervoudig nulpunt.

Dus $a_n = \lambda_1 2^n + \lambda_2 n 2^n$

$a_0 = 1 = \lambda_1 + \lambda_2 \cdot 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1$

$a_1 = 4 = \lambda_1 2 + \lambda_2 \cdot 1 \cdot 2 \Rightarrow 2\lambda_2 = 4 - 2 = 2.$

$\lambda_2 = 1.$

Dus $a_n = 2^n + n 2^n$

b) bij a hebben we de algemene oplossing van de homogene vergelijking $H(a_n) = a_n - 4a_{n-1} + 4a_{n-2}.$

Dit is $\lambda_1 2^n + \lambda_2 n 2^n$

Nu de particuliere. Er moet gelden $H(p_n) = 2 \cdot 2^n + n.$

probeer $H(2^n) = 2^n - 4 \cdot 2^{n-1} + 4 \cdot 2^{n-2} = 2^n - 2 \cdot 2^n + 2^n = 0.$

dus probeer $H(n^2 2^n) = n^2 2^n - 4(n-1)^2 2^{n-1} + 4(n-2)^2 2^{n-2}.$

$= 2^n (n^2 - 2(n^2 - 2n + 1) + (n - 4n + 4))$

$= 2^n (-2 + 4) = 2 \cdot 2^n.$

en $H(n) = n - 4(n-1) + 4(n-2) = n - 4.$

en $H(1) = 1 - 4 + 4 = 1$

en omdat $H(a_n)$ lineair is geldt

$H(n^2 2^n + n + 4) = 2 \cdot 2^n + n - 4 + 4 = 2 \cdot 2^n + n$

Dus $p_n = n^2 2^n + n + 4,$

en $a_n = \lambda_1 2^n + \lambda_2 n 2^n + n^2 2^n + n + 4.$

Opgave 10

a) $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$

$a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n$.

$a_{n+2}x^n = 4a_{n+1}x^n - 4a_nx^n$.

$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}x^n = 4\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}x^n - 4\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$.

nu is $\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}x^n = \frac{1}{x^2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}x^{n+2} = \frac{1}{x^2}(G(x) - a_0 - a_1x)$

waar $G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

ook voor $4\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}x^n = \frac{4}{x}(G(x) - a_0)$.

$a_0 = 1$ en $a_1 = 4$ geeft

$\frac{1}{x^2}(G(x) - 1 - 4x) = \frac{4}{x}(G(x)-1) - 4G(x)$.

$G(x) - 1 - 4x = 4x(G(x)-1) - 4G(x)x^2$.

$G(x)(1-4x+4x^2) = 1+4x-4x$

$G(x) = \frac{1}{1-4x+4x^2} = \frac{1}{(1-2x)^2}$

$= \sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+2-1}{1}(2x)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+1}{1}2^kx^k$

Dus $a_n = \binom{n+1}{1}2^n = (n+1)2^n$.

Opgave 11

$(n+2)(n+4)a_n = (n+1)(n+5)a_{n-1} + 2(n+3)(n+4)(n+5)$ voor $n \geq 1$.

we zoeken $s_n = \frac{s_{n-1}f_{n-1}}{g_n}$

met $f_n = (n+2)(n+4)$

en $g_n = (n+1)(n+5)$.

dus $f_{n-1} = (n+1)(n+3)$.

en $\frac{f_{n-1}}{g_n} = \frac{(n+1)(n+3)}{(n+1)(n+5)} = \frac{n+3}{n+5}$.

en $S_n = \frac{f_{n-1}}{g_n} \cdot \frac{f_{n-2}}{g_{n-1}} \cdot \ldots \cdot \frac{f_1}{g_2}$

$$= \frac{n+3}{n+5} \cdot \frac{n+2}{n+4} \cdot \frac{n+1}{n+3} \cdot \ldots \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{6}{8} \cdot \frac{5}{7}$$

$$= \frac{6 \cdot 5}{(n+5)(n+4)}$$

Dus we vermenigvuldigen met $\frac{30}{(n+5)(n+4)}$ geeft

$$\frac{30(n+2)}{(n+5)} a_n = \left(\frac{n+1}{n+4}\right) 30 a_{n-1} + \frac{2 \cdot 30}{\cancel{}} (n+3)$$

$$\frac{n+2}{n+5} a_n = \frac{n+1}{n+4} a_{n-1} + 2(n+3).$$

neem nu $T_n = \frac{n+2}{n+5} a_n$, dit geeft

$$T_n = T_{n-1} + 2(n+3).$$

en $T_0 = \frac{2}{5} \cdot 25 = 10$. $2+5.$ $2 \cdot \frac{(5+2)}{2}.$

Dus $T_n = \sum_{i=1}^{n} 2(n+3) + T_0$

$$\cancel{= (n-1)(2 \cdot 4 + 2(n+3))/2 + 10}$$
$$\cancel{= (n-1)(4 + n+3) + 10}$$
$$\cancel{= (n-1)\ n^2 + 6n - 7 + 10.}$$

$$= n\,(2 \cdot 4 + 2(n+3)/2 + 10.$$
$$= n\,(n+7) + 10 = n^2 + 7n + 10$$
$$= (n+5)(n+2).$$

Dus $a_n = \frac{(n+5)}{n+2} T_n = \frac{n+5}{n+2} \cdot (n+5)(n+2) = (n+5)^2$.

Opgave 12.

n bedienden k bandieten.

Dit doen we met inclussie stelling.

P(alle bandieten sterfen).

In totaal zijn er k^n manieren om bandieten te raken.
k cellen en n ballen, alles is herkenbaar.

a_i is bandiet i wordt niet geraakt.

dit kan op $(k-1)^n$ manieren
en $N(a_i a_j) = (k-2)^n$ manieren.
en $N(a_i a_j a_k) = (k-3)^n$ etc
en a_i kiezen we op $\binom{k}{1}$ manieren
en $a_i a_j$ kiezen we op $\binom{k}{2}$ manieren.

Dus N(elke bandiet wordt geraakt)

$$= k^n - \binom{k}{1} N(a_i) + \binom{k}{2} N(a_i a_j) - \dots$$

$$= k^n - \binom{k}{1}(k-1)^n + \binom{k}{2}(k-2)^n - \dots$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i}(-1)^i \cdot (k-i)^n$$

Dus de kans is $P = \dfrac{\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i}(-1)^i (k-i)^n}{k^n}$

$$= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i}(-1)^i \left(1 - \frac{i}{k}\right)^n$$

maar er mag ook 1 bandiet overleven

oftewel $e_1 = S_1 - \binom{2}{1} S_2 + \binom{3}{1} S_3 - \dots + (-1)^{k-1} \binom{k}{1} S_k$.

en $S_t = \sum N(a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_t})$
$= \binom{k}{t}(k-t)^n$ in ons geval.

Dus $e_1 = \binom{k}{1}(k-1)^n - 2\binom{k}{2}(k-2)^n + \dots + (-1)^{k-1} k \cdot \binom{k}{k} \cdot (k-k)^n$
$= \sum_{i=1}^{n} i \binom{k}{i} (k-i)^n$

en deel door k^n voor de kans.

Dus $p(1 \text{ overleeft na de dienaren}) = \frac{\sum_{i=1}^{k} i \binom{k}{i}(k-i)^n (-1)^{i-1}}{k^n}$.

Dus kans totaal is $p = \sum_{i=0}^{k} (1-i)\binom{k}{i}\left(1-\frac{i}{k}\right)^n$

Opgave 2

Je moet k elementen uit n kiezen, dit kan op $\binom{n}{k}$ manieren. Deze kunnen op $(k-1)!$ manieren 1 lange cykel worden. De rest kun je ~~op~~ nog op $(n-k)!$ manieren cykels van maken.
In totaal zijn er $n!$ cykels, dus

$$\frac{\binom{n}{k}(k-1)!(n-k)!}{n!} = \frac{\frac{n!}{(n-k)!k!}(k-1)!(n-k)!}{n!} = \frac{(k-1)!}{k!} = \frac{1}{k}.$$

Dit kan omdat $k > \frac{n}{2}$, dus van de $(n-k)$ overgebleven elementen kan geen cykel ontstaan van lengte k.