Universiteit Utrecht
Betafaculteit
Examen Discrete Wiskunde op maandag 13 april, 9.30-12.30 uur.

- De opgaven dienen duidelijk uitgewerkt te zijn en netjes ingeleverd te worden. Schrijf op elk ingeleverd vel uw naam en studentnummer.
- Wanneer u een bekende stelling wilt gebruiken, dan moet u die netjes formuleren; u hoeft hem niet te bewijzen.
- Wanneer u een algoritme wilt gebruiken, dan hoeft u alleen de naam van het algoritme te noemen en waarvoor u het wilt gebruiken.
- Het examen omvat 7 opgaven met in totaal 11 (deel)opgaven; iedere opgave kan onafhankelijk van de voorgaande opgaven worden gemaakt.
- De maximale score per deelopgave is als volgt (totaal 42 punten):
  - 2 punten op vraag 1b;
  - 3 punten op vragen 1a, 1c;
  - 4 punten op vragen 1d, 2, 3a, 3b, 4, 5;
  - 5 punten op vragen 6, 7.
- Een rekenmachine is niet nodig en derhalve verboden. Eventuele rekenfouten worden niet bestraft, tenzij het de spuigaten uitloopt (dit ter beoordeling van de nakijker).

Succes!

==

Opgave 1.
Han Solo, kapitein van de Millennium Falcon, wil voor de verjaardag van prinses Leia graag een ketting maken. Hij heeft hiervoor vier soorten (binnen een soort zijn de edelstenen identiek): smaragden (groen), robijnen (rood), topaas (geel) en saffieren (blauw). Nu weet hij dat Leia nogal kieskeurig is als het gaat om sieraden: hij heeft haar eens horen zeggen dat ze graag een ketting met 8 edelstenen wil. Han vraagt zich af hoeveel verschillende kettingen hij zou kunnen maken. Als twee kettingen door middel van het cyclisch doorwisselen van de edelstenen of het omdraaien van de gehele ketting hetzelfde kunnen worden gemaakt, dient deze ketting maar één keer geteld te worden.

(a) Geef de verschillende permutaties (denk eraan dat je ze bij (b) ook nog nodig hebt).

(b) Gegeven de gewichten $w(\text{smaragd}) = gr$, $w(\text{robijn}) = r$, $w(\text{topaas}) = ge$ en $w(\text{saffier}) = b$, bepaal de pattern inventory (notatie $\text{Inve}(gr, r, ge, b)$). U mag hierbij uiteraard machten van $(gr + r + ge + b)$, enz. laten staan.

(c) Han heeft Leia wel eens horen zeggen dat ze een ketting wil met 8 edelstenen die precies één saffier bevat. Bereken hoeveel mogelijke kettingen er nu nog over blijven door geschikte getallen voor gr, r, ge in te vullen. Enumeratie levert niets op.

(d) Voor de zekerheid heeft Han nog navraag gedaan. De informatie bij (1c) blijkt al weer verouderd: Leia wil namelijk het liefst een ketting van 8 edelstenen met **precies een even aantal smaragden en een oneven aantal saffieren**. Bereken hoeveel mogelijke kettingen er nu nog over blijven door geschikte getallen voor gr, r, ge, b in te vullen. Enumeratie levert niets op.

Opgave 2.
Twee beruchte bankrovers, R(GGK) en H(JS) genaamd, hebben een grote slag geslagen bij de lokale bank en zijn nu op de vlucht. De politie weet niet precies naar welke stad ze gaan en heeft nog een aantal mogelijkheden over. Dan krijgen ze informatie; R en H zijn gespot op een bepaalde snelweg tussen twee steden! Ze zijn niet snel genoeg om R en H op deze snelweg aan te houden, maar ze weten dat de overvallers GPS gebruiken en dus, waar ze ook naartoe gaan, altijd de kortste route zullen nemen. De politie vraagt nu om jouw hulp om de schurken te pakken te krijgen. Gegeven zijn een graaf $G = (V, E)$, waarbij de knopen steden aangeven en de zijden wegen daartussen. De lokale bank bevindt zich in stad v_0; R en H zijn gespot op de zijde $e' = \{v_1, v_2\} \in E$ (de richting waarin ze gingen was helaas onbekend). Elke weg heeft een geheeltallige, positieve lengte l_e. Geef een algoritme dat bepaalt welke steden allemaal de eindbestemming van R en H kunnen zijn.

Opgave 3.
Ondanks je beste poging bij de vorige vraag zijn R en H toch weggekomen. Ze hebben hun buit van 100 (betekenisloze) geldeenheden op een Zwitserse bankrekening gezet en willen dit via omwegen (= andere rekeningen) weer terugsluizen naar hun persoonlijke bankrekeningen. Noem de Zwitserse bankrekening Z, R zijn rekening B_R en H zijn rekening B_H. Verder zijn er n overige rekeningen $B_1, \ldots, B_n$. Natuurlijk kunnen R en H elke dag maar een beperkte hoeveelheid geld tussen twee rekeningen overmaken; ze willen niet dat de banken argwanend worden! Daarbij komt ook dat aan het einde van elke dag het geld geheel verdeeld moet zijn tussen Z, B_R en B_H (er mag dus geen geld achtergebleven zijn op één van de andere rekeningen $B_1, \ldots, B_n$). R en H willen dat hun totale tegoed in zo weinig mogelijk dagen wordt weggesluisd. Derhalve moet het totale bedrag dat per dag wordt weggesluisd zo hoog mogelijk zijn.

(a) Het bovenstaande leidt tot het onderstaande stroomprobleem. Hierbij zijn de rekeningen B_R en B_H samengevoegd tot de en/of rekening EO. R en H zijn zelf al aan het oplossen geslagen, en ze zijn tot de onderstaande oplossing gekomen. Controleer of de door hen gevonden oplossing optimaal is; zo niet, los dit probleem optimaal op en bewijs de optimaliteit van uw oplossing. De getallen naast de pijl gegeven de stroom door de pijl en de capaciteit van die pijl aan. **Er is een antwoordformulier beschikbaar; u bent niet verplicht het te gebruiken**. Vergeet niet het in te leveren als je het hebt gebruikt.

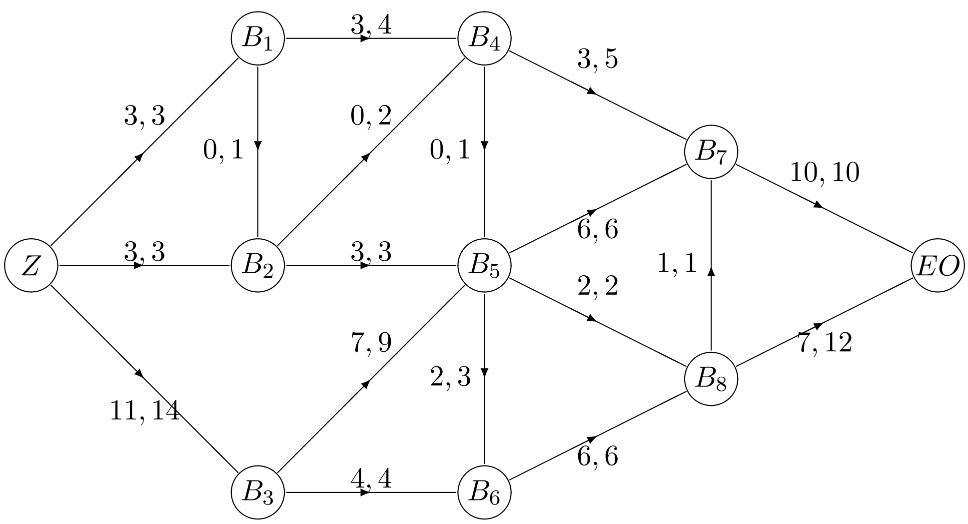

Figure 1: Netwerk

(b) Hoewel ze elkaar natuurlijk blind vertrouwen, vinden R en H het eigenlijk wel zo fijn om ieder een eigen rekening te hebben, en ze willen graag na afloop beiden *hetzelfde bedrag* op hun rekening hebben staan. Geef aan hoe u in het algemeen het stroomprobleem met die extra eis op kunt lossen (dus niet specifiek voor de bovenstaande graaf).

N.B.. De punten B_R en B_H hoeven niet dezelfde verzameling buren te hebben.

Opgave 4.
Een onvoorzien probleem! De banken brengen kosten in rekening voor het overmaken van geld tussen twee rekeningen; deze kosten zijn gelijk aan een gegeven percentage van het bedrag dat wordt overgemaakt (dit percentage is afhankelijk van de banken waartussen het geld wordt overgemaakt). Aangezien R en H bankrover zijn geworden uit de overtuiging dat de banken te veel winst maken, willen ze dus ook zo veel mogelijk geld zelf houden. Wel willen ze nog steeds het minimale aantal dagen gebruiken dat bij vraag (3a) is gevonden (als je de vorige vraag niet hebt beantwoord, mag je uitgaan van 7 dagen). Geef aan hoe je een optimale verdeling kunt maken van de hoeveelheid geld die elke dag van rekening Z wordt doorgesluisd naar de en/of rekening. U mag er hierbij van uitgaan dat de instroom gelijk blijft aan de uitstroom en dat er nog steeds 100 eenheden moeten worden overgemaakt; de kosten worden later apart verrekend.

Indien u bij het bovenstaande een of meer stellingen wilt gebruiken, dan moet u die netjes formuleren; u hoeft deze stellingen niet te bewijzen.

Opgave 5.
Nu het geld op de goede rekeningen staat vluchten R en H zo snel mogelijk naar meesterbrein J(AH), die hen een nieuwe identiteit verschaft in Nederland, zodat ze van hun zuurverdiende geld kunnen genieten. Er is echter één kleine complicatie: het geld moet eerst witgewassen worden. Daarom beginnen R en H een handelsbedrijf dat winkels (shops) belevert. In iedere periode t ($t = 1, \ldots, T$) proberen R en H vraag en aanbod op een zo gunstig mogelijke wijze op elkaar af te stemmen. Wat aanbod betreft hebben ze ruim keus. In iedere periode t ($t = 1, \ldots, T$) kunnen ze kiezen uit n aanbiedingen; aanbod i ($i = 1, \ldots, n$) betreft de aankoop van p_{it} eenheden tegen een prijs van in totaal c_{it} (dus niet per eenheid). Ze moeten uit de verschillende aanbiedingen precies één aanbod kiezen per periode; dit mag iedere periode weer een ander aanbod zijn. De ingekochte hoeveelheid kan worden gebruikt om de verschillende winkels te beleveren; de totale vraag van de winkels in periode t bedraagt d_t eenheden, en dit levert q_t op. Aangezien R en H bekend willen staan als betrouwbare leveranciers moeten ze in iedere periode aan de vraag voldoen. Verder is het mogelijk om voorraad aan te houden; deze voorraad mag maximaal V eenheden bedragen, en het kost h per eenheid per periode. R en H beginnen met een beginvoorraad van 0 eenheden. De eindvoorraad kan straffeloos worden gedumpt.

Geef een algoritme dat het bovenstaande probleem optimaal oplost. Alle genoemde aantallen zijn geheeltallig.

Opgave 6.
Helaas worden R en H na enige tijd slachtoffer van een onduidelijkheid in de wet: hun handelsbedrijf schijnt toch niet legaal te zijn (iets met een voor- en een achterdeur). Dit levert de heren een pittige werkstraf op: 160 uur schoffelen per persoon. Nadat ze tijdens het schoffelen getuige zijn geweest van het werk van ordinaire tasjesdieven besluiten ze om zich voortaan bezig te houden met het bestrijden van dit soort criminaliteit, en ze solliciteren als treinbeveiliger. Na een korte training gaan ze gezamenlijk (dus als team) iedere ochtend om 8.30 vanaf Utrecht CS op stap om de orde te handhaven en het publiek te beveiligen; om 17.00 uur moeten R en H weer op Utrecht CS terug zijn. Ze hebben een lijstje (app) gekregen met het volledige rittenschema, en verder nog een lijstje met de treinritten $s \in S$ (met gegeven begin- en eindtijd en begin- en eindplaats) waarop problemen worden verwacht en waarop hun aanwezigheid nuttig zou zijn (met score $c_s > 0$ voor iedere $s \in S$). Aangezien er toch geen controle op hun werkzaamheden is kunnen R en H zelf besluiten welke ritten ze gaan beveiligen, maar omdat ze toegewijd zijn kiezen ze de verzameling van taken die tot een maximale score leidt. Tussendoor kunnen ze op het station verblijven (levert score 0 op) of een trein met score 0 pakken om naar een andere plaats te reizen. Omdat ze zich bij het overstappen niet willen haasten zorgen ze er altijd voor dat ze minstens 10 minuten speling hebben bij iedere overstap.

Geef aan hoe je dit probleem kunt herformuleren als een bekend probleem waarvoor een algoritme bekend is dat het optimaal oplost. Dit hoeft niet het algoritme met minimale looptijd te zijn, zolang het maar polynomiaal is.

Opgave 7.
Na een paar incidenten te hebben meegemaakt dienen R en H een verzoek in om voortaan bewapend te mogen gaan met pepperspray. Helaas wordt dit verzoek afgewezen, waarop R en H besluiten om hun carrière elders voort te zetten. Aangezien ze nog steeds toegewijd zijn aan de misdaadbestrijding zoeken ze hun heil in de beveiligingsbranche, en ze vinden werk als chauffeur/bijrijder (en beveiliger/bewaker) bij een geldtransportbedrijf. Daar vallen ze al snel op door hun organisatorische talent, zodat ze ook hier weer hun eigen planning mogen maken (wat het werk ook weer wat uitdagender maakt); uiteraard plannen ze hun werkzaamheden zo dat ze samen op een auto zitten. Hun werkzaamheden betreffen het ophalen van koffers met geld in de ene plaats, en deze koffers moeten dan direct naar de eindbestemming worden gebracht (om te voorkomen dat er zich te veel geld in de auto bevindt). Gegeven is een graaf $G = (V, E)$, waarbij V de knopen en E de kanten zijn; voor iedere kant is gegeven hoe lang het duurt om deze te nemen. R en H moeten n taken uitvoeren; voor iedere taak is gegeven waar het geld moet worden opgehaald en naar welke andere plaats het heen moet worden gebracht. Uiteraard willen R en H zo snel mogelijk klaar zijn met hun werkzaamheden. Toon aan dat dit probleem $\mathcal{NP}$-lastig is door middel van een reductie uit de beslissingsvariant van het HANDELSREIZIGERSPROBLEEM. Het HANDELSREIZIGERSPROBLEEM is als volgt gedefinieerd:

Gegeven een volledige graaf $G = (V, E)$ en een afstand c_e voor iedere kant $e \in E$, bepaal een tour van minimale lengte die ieder punt $v \in V$ precies éénmaal bezoekt.

Motiveer uw antwoord. Indien u problemen hebt met de eis dat de plaatsen waarin de geldkoffers worden opgehaald en afgeleverd verschillend moeten zijn, dan kunt u nog punten verdienen door aan te tonen dat het probleem $\mathcal{NP}$-lastig is indien deze plaatsen gelijk mogen zijn.