Universiteit Utrecht
Betafaculteit

Examen Discrete Wiskunde I op vrijdag 29 mei 2015, 14.00-17.00 uur.

- De opgaven dienen duidelijk uitgewerkt te zijn en netjes ingeleverd te worden. Schrijf op elk ingeleverd vel uw naam en studentnummer.
- Het examen omvat 10 opgaven met in totaal 13 (deel)opgaven.
- Op de vragen 1 en 7a kunnen maximaal 3 punten worden gescoord; op alle overige vragen kunnen maximaal 4 punten worden gescoord. Totaal 50 punten.
- Wanneer gevraagd wordt om een probleem op een bepaalde manier op te lossen, dan wordt iedere andere manier volledig fout gerekend. Enumeratie levert eveneens niets op.
- Een rekenmachine is niet nodig en derhalve verboden. Eventuele rekenfouten worden niet bestraft, tenzij het de spuigaten uitloopt (dit ter beoordeling van de nakijker).

Succes!

==

Opgave 1.
Iemand gooit één keer met vijf dobbelstenen. Hoe groot is de kans dat er minstens vier dobbelstenen een gelijke uitkomst hebben?

Opgave 2.
Gegeven zijn twee gesorteerde rijen $a_1, \ldots, a_k$ en $b_1, \ldots, b_n$. Deze willen we samenvoegen tot één rij, waarin de elementen $a_2, \ldots, a_k$ en $b_1, \ldots, b_n$ in de juiste volgorde blijven staan (waarbij de elementen uit de andere rij er tussen door komen); element a_1 mag overal komen te staan, zolang het maar niet links van a_2 staat. Hoeveel verschillende rijen kunnen op deze manier worden gevormd? Deze formule mag geen sommatie bevatten.

Opgave 3
We willen k niet-negatieve, gehele getallen $x_1, \ldots, x_k$ trekken zodanig dat $x_1 + \ldots + x_k = n$.

(a) Bewijs met behulp van een **combinatorisch** bewijs dat het aantal mogelijkheden hiervoor gelijk is aan $\binom{n+k-1}{k-1}$.

(b) Bewijs (a) met behulp van een genererende functie.

(c) Bereken (dus geen volledige enumeratie) het aantal mogelijkheden om drie niet-negatieve, gehele getallen x_1, x_2 en x_3 te kiezen zodanig dat $x_1 + x_2 + x_3 = 20$, waarbij geldt $x_1 \in \{4, 5, 6\} \cup \{10, 11, 12\}$, $x_2 \leq 8$ en $5 \leq x_3 \leq 10$.

Opgave 4
In het verre land Wismania hebben ze een bijzonder geldsysteem. Ze hebben 15 verschillende munten, die allemaal een verschillende, geheeltallige waarde hebben met een maximum van 50 Mania. Een man heeft van elke soort precies één munt. De man heeft twee kinderen en wil elk van zijn kinderen precies 2 munten geven. Om ruzie te voorkomen wil de vader er wel voor zorgen dat beide kinderen evenveel Mania's krijgen.

Bewijs dat dit voor iedere mogelijke serie waarden van die 15 munten mogelijk is, of geef een tegenvoorbeeld.

Opgave 5.
Gegeven is een kring van n stoelen en een aantal bobo's die op die stoelen kunnen gaan zitten. Een bobo heeft uiteraard een assistent bij zich voor het denkwerk; wanneer de bobo aan tafel zit, dan neemt de assistent altijd naast de bobo plaats (aan de rechterkant uiteraard, want het is de rechterhand van de bobo). Definieer a_n als het aantal mogelijke manieren om de stoelen te vullen. Hierbij mag u er van uit gaan dat een bobo niet onderscheiden kan worden van een andere bobo; het aantal bobo's dat geplaatst wordt mag kleiner zijn dan $\lfloor n/2 \rfloor$; de overige stoelen blijven dan gewoon leeg. Geef een relatie tussen a_n en Fibonacci getallen.

Opgave 6.
Geef een combinatorisch bewijs van de onderstaande gelijkheid.

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n-k+1}{k} = F(n);$$

hierbij is $F(n)$ het $n$de Fibonacci getal, waarbij geldt $F(0) = 1$ en $F(1) = 2$.

Opgave 7.
Los de onderstaande recurrente betrekkingen op met de JBF methode (karakteristieke vergelijking, particuliere oplossing, enz.). U mag eerder gevonden resultaten uiteraard hergebruiken. Bij (b) zijn de beginwaarden niet gegeven; hier hoeft u de constanten niet uit te rekenen.

$$(a) \quad a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} \quad \text{voor } n \geq 1 \text{ met } a_0 = 1 \text{ en } a_1 = 4.$$

$$(b) \quad a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} + 2 \cdot 2^n + n \quad \text{voor } n \geq 2 \text{ met } a_0 \text{ en } a_1.$$

Opgave 8.
Los de onderstaande recurrente betrekking op met behulp van een genererende functie.

$$a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} - 2 \quad \text{voor } n \geq 2 \text{ met } a_0 = 2 \text{ en } a_1 = 5.$$

Opgave 9.
Los de onderstaande recurrente betrekking op met de sommatie-factor methode

$$(n+2)(n+4)a_n = (n+1)(n+5)a_{n-1} + 2(n+3)(n+4)(n+5) \quad \text{voor } n \geq 1;$$

hierbij geldt $a_0 = 25$. Geef duidelijk aan hoe je de gebruikte factor kunt afleiden (ook al zou je hem met het blote oog direct kunnen zien).

Opgave 10
Een citaat uit een willekeurige goedkope avonturenroman.

Het konvooi dat de prinses begeleidde was aangevallen door een horde moordlustige bandieten. Een hevige strijd ontbrandde, waarbij langzaam maar zeker de ridders, die de prinses moesten beschermen, werden uitgeschakeld, totdat uiteindelijk alleen de prinses en haar bedienden nog over waren. De bandieten liepen breed grijnzend op hen af om die ongewapende bedienden om zeep te helpen en de prinses gevangen te nemen. Wat ze niet wisten was dat ieder van de bedienden een kruisboog bij zich had (met helaas maar één pijl) en dat ze daarmee flink hadden geoefend. Verder beschikte de prinses nog over een dodelijk werpmes (waar ze ook goed mee om kon gaan). Toen de bedienden de kruisboog te voorschijn haalden deinsden ze terug, maar toen de roverhoofdman een grote beloning uitloofde voor degene die de prinses gevangen nam, drongen de bandieten op. Daarop schoten alle bedienden tegelijk hun kruisboog af op een willekeurige bandiet; was er maar tijd geweest om het schieten te coördineren ...

Uiteraard loopt het in zo'n verhaal helemaal goed af, maar hoe groot is die kans eigenlijk? Neem aan dat er n bedienden zijn en in totaal k bandieten; bedenk dat de prinses na het salvo nog de beschikking heeft over haar werpmes. Neem verder aan dat iedereen zijn hoofd koel houdt en raak schiet/werpt (en dit schakelt zo'n bandiet volledig uit). Geef aan hoe je die kans kunt berekenen.

Formules enz.

Inclusion-Exclusion
Stel dat er in totaal N objecten zijn. Ieder object kan r verschillende eigenschappen, $a_1, \ldots, a_r$, bezitten. Het aantal objecten dat eigenschappen $a_{i_1}, \ldots, a_{i_t}$ bezit (en mogelijk nog andere eigenschappen) wordt genoteerd met $N(a_{i_1}, \ldots, a_{i_t})$; met $s_t = \sum N(a_{i_1}, \ldots, a_{i_t})$ wordt aangegeven dat er wordt gesommeerd over iedere combinatie van t ($t = 0, \ldots, r$) verschillende eigenschappen. Verder geeft $N(a'_1, \ldots, a'_r)$ het aantal van de N objecten aan die geen enkele van de r eigenschappen bezitten. Nu geldt

$$N(a'_1, \ldots, a'_r) = N - s_1 + s_2 + \ldots + (-1)^k s_k$$

Evenzo kun je het aantal elementen met precies m eigenschappen bepalen als

$$e_m = s_m - \binom{m+1}{1} s_{m+1} + \binom{m+2}{2} s_{m+2} + \ldots + (-1)^{r-m} \binom{m+r-m}{r-m} s_r.$$

Binomium
Het uitgebreide binomium van Newton is gedefinieerd als

$$(1+x)^u = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{u}{r} x^r,$$

waarbij

$$\binom{u}{r} = \begin{cases} \frac{u(u-1)\ldots(u-r+1)}{r!} & \text{als } r > 0 \\ 1 & \text{als } r = 0 \end{cases}$$

Toepassing van de regel levert bijv.

$$\frac{1}{(1-x)^p} = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{r+p-1}{p-1} x^r.$$

Het aantal mogelijkheden om n genummerde ballen te verdelen over k onherkenbare dozen is het Stirling getal $S(n,k)$. Dit is gedefinieerd als

$$S(n,k) = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n$$